1.2.

Cremona, Calcolo grafico, 1874.

ELEMENTI

DI

CALCOLO GRAFICO,

DEL PROF.

LUIGI CREMONA

Direttore della R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Roma,

AD USO DEGLI

ISTITUTI TECNICI

del Regno d'Italia.

TORINO,

STAMPERIA REALE DI G. B. PARAVIA E C.

1874.

AL LETTORE.

—

Quest'opuscoletto non è stato scritto che per un fine scolastico, e cioè per servire ai giovani allievi delle Scuole d'applicazione, che vogliano prepararsi alla statica grafica, ed agli studenti degli Istituti tecnici, ai quali i programmi del 1871 fanno l'obbligo di studiare alcune parti del calcolo grafico.

Sebbene mi possa essere riuscito di semplificare o generalizzare alcuni risultati, tuttavia io non aspiro al vanto di novatore: vanto che sarebbe d'altra parte assai inopportuno in materia così elementare come questa.

Le opere, alle quali ho attinto tutto ciò che possa esservi di buono in queste pagine, sono particolarmente quelle di Möbius, del nostro Chelini, di Grassmann, di Culmann, e di altri autori che non ho tralasciato di citare, ogni qualvolta mi è stato possibile.

Le figure sono state disegnate dall'egregio Ing. Carlo Saviotti, al quale mi professo gratissimo.

Roma (S. Pietro in Vincoli), dicembre 1873.

L'Autore.

INDICE.

Al lettore . . . . *Pag.* III

I. **Principio de' segni in geometria** . . . . » 1
1. Principio de' segni pei segmenti rettilinei. — 2. Relazione fra i segmenti determinati da tre punti in linea retta. — 4. Analoga relazione per n punti in linea retta. — 6. Altra relazione fra i segmenti determinati da quattro punti in linea retta. — 7. Relazione fra le distanze di un punto da tre rette concorrenti. — 8. Principio dei segni per gli angoli. — 9. Relazione fra gli angoli determinati da tre rette in un piano. — 12 e 18. Principio de' segni per le aree. — 13. Relazione fra le aree dei triangoli determinati da quattro punti in un piano. — 16. Relazione fra le distanze di un punto da tre rette comunque situate in un piano. — 17. Circuiti intrecciati. — 18-23. Area di un circuito chiuso. — 24. Somma dei triangoli che da un dato polo projettano n segmenti dati in un piano.

II. **Addizione grafica** . . . . » 17
28. Somma geometrica di n segmenti dati. — 31. La risultante di più segmenti è indipendente dall'ordine della composizione — 32. Caso in cui la risultante è zero. — 36. Sottrazione grafica. — 38. Projezione di un circuito. — 40-42. Teoremi relativi a due gruppi di punti tali che siano uguali le risultanti dei segmenti che li congiungono ad uno stesso polo. — 43. Composizione di n segmenti, dati di grandezza, senso e posizione. — 46-49. Costruzione del segmento risultante. — 50. Caso che i segmenti dati siano paralleli. — 51. Caso di due segmenti paralleli.

III. **Moltiplicazione** . . . . » 25
52. Moltiplicazione di una retta per un rapporto. — 54. Divisione di una retta in parti. — 55. Divisione di un angolo in parti uguali. — 56-59. Moltiplicazione di n segmenti d'una stessa retta per uno stesso rapporto. — 60. Moltiplicazione di n segmenti dati di grandezza, direzione e senso, rispettivamente per n rapporti dati. — 62-64. Casi particolari. — 65. Prodotto di un segmento per n rapporti dati. — 67-69. Altre costruzioni per lo stesso problema.

IV. **Potenze** . . . . » 36
70. Moltiplicazione di un segmento per la potenza n-esima di un dato rapporto. — 71, 72. Altre costruzioni per lo stesso problema.

V. **Estrazione di radice** . . . . *Pag.* 39
73. Spirale equiangola. — 74-79. Proprietà della spirale e costruzione della medesima. — 80. Applicazione all'estrazione di radice. — 82. Radice quadrata. — 83. Curva logaritmica. — 84. Costruzione di questa curva. — 85. Costruzione della tangente. — 86. Applicazione.

VI. **Risoluzione delle equazioni numeriche** . . . . » 45
87. Costruzione di un polinomio intero. — 88. Metodo di Lill. — 89, 90. Abbassamento delle equazioni. — 91. Equazione di 2° grado.

VII. **Trasformazione delle figure piane** . . . . » 50
92. Riduzione di un triangolo ad una base data. — 94-97. Riduzione di un quadrilatero. — 98-100. Riduzione di un poligono intrecciato. — 101. Figure circolari. — 103, 104. Esempi. — 105-107. Figure curvilinee in generale. — 108. Altra costruzione della risultante di n segmenti dati di grandezza, senso e posizione.

VIII. **Baricentri** . . . . » 57
109, 110. Baricentro di n punti. — 112. Centro delle medie distanze. — 113-115. Baricentro di n punti, affetti da coefficienti intieri. — 117-119. Baricentro di n punti, affetti da coefficienti qualsivogliano. — 120. Costruzione del baricentro. — 122. Caso che i punti siano in linea retta. — 123. Caso di tre punti. — 124. Caso che la somma de' coefficienti sia nulla. — 125. Altra proprietà del baricentro. — 126. Costruzione che se ne deduce. — 127. Baricentro di un sistema continuo di punti. — 128. Baricentro di un segmento rettilineo. — 129. Baricentro di un parallelogrammo. — 130. Baricentro di una figura dotata di un diametro. — 131. Baricentro di un triangolo. — 132. Baricentro di un sistema di segmenti rettilinei o di aree triangolari. — 133, 134. Baricentro di un contorno rettilineo. — 135. Baricentro di un arco circolare. — 136. Baricentro del perimetro di un triangolo. — 137. Baricentro di un quadrilatero. — 138. Baricentro di un trapezio. — 140. Baricentro di un poligono. 141-143. Esempi. — 144. Baricentro di un settore circolare. — 145. Baricentro di un segmento circolare. — 146. Baricentro di una figura contenuta da rette e da archi circolari.

IX. **Rettificazione di un arco circolare** . . . . » 76
147. Costruzione di Rankine. 148. Costruzioni di Sayno.

ELEMENTI DI CALCOLO GRAFICO.

I.

Principio de' segni in geometria.

1. Siano O, A, X tre punti di una data retta (fig. 1), de' quali i primi due si considerino come fissi; il terzo invece partendo da O si muova nella direzione OA. Siano poi a, x i numeri delle unità lineari rispettivamente contenute ne' segmenti (porzioni limitate della retta) OA, OX. Sinchè X rimane fra O ed A, si ha $x < a$; quando X cade appunto in A, è $x = a$; e dopochè X sarà passato oltre, avremo $x > a$.

Se il punto X, in luogo di muoversi da O in avanti verso A, camminasse all'indietro nella direzione opposta (fig. 2), il numero x delle unità lineari contenute nel segmento OX si considererebbe come negativo, ritenuto essere a un numero positivo. Per es. quando X ed A fossero equidistanti da O, si avrebbe $x = -a$.

Una retta sarà da noi pensata sempre come descritta da un punto mobile. Delle due direzioni nelle quali può avvenire il movimento del punto generatore, l'una si dice positiva, l'altra negativa. Invece di direzione positiva o negativa si dice anche senso positivo o negativo.

Se un segmento di retta è indicato per mezzo del numero x di unità lineari in esso contenute, il senso del segmento sarà messo in evidenza dal segno algebrico ($+$ o $-$) del numero x.

Ma un segmento si designa anche per mezzo delle due lettere collocate ai suoi termini, per es. AB (fig. 3). Ed in questo caso conveniamo di scrivere AB o BA, secondo che il movimento del punto generatore s'intenda fatto nella direzione da A verso B o

nell'opposta. Dietro questa convenzione, i simboli AB, BA esprimono due grandezze uguali ed opposte (*), donde segue l'identità

$$AB + BA = 0,$$

ossia

$$AB = -BA, \quad BA = -AB.$$

De'due punti A, B, che sono gli estremi del segmento AB, l'uno A dicesi l'origine, l'altro B il termine del segmento. Invece nel segmento BA, B è l'origine ed A il termine.

2. Siano A, B, C tre punti in linea retta. Se C è fra A e B (fig. 3), si ha

$$AB = AC + CB,$$

donde

$$-CB - AC + AB = 0,$$

ossia, siccome (N° 1)

$$-CB = BC, \quad -AC = CA,$$

così

$$BC + CA + AB = 0.$$

Se C è sul prolungamento di AB, si ha

$$AB + BC = AC,$$

donde

$$BC - AC + AB = 0,$$

ossia

$$BC + CA + AB = 0.$$

Finalmente, se C è nel prolungamento di BA, si ha

$$CA + AB = CB,$$

donde

$$-CB + CA + AB = 0,$$

ossia

$$BC + CA + AB = 0.$$

Concludiamo adunque (**):

Se A, B, C sono tre punti in linea retta, qualunque sia la loro scambievole giacitura, sussiste sempre l'identità

$$BC + CA + AB = 0.$$

(*) Cioè due grandezze di ugual valore aritmetico e di segni algebrici opposti, come $+a$ e $-a$.

(**) Möbius, *Barycentrischer Calcul* (Leipzig, 1827), § 1.

3. Di qui si cava l'espressione della distanza di due punti A, B, formata colle distanze che i medesimi hanno da un punto O allineato con essi, e fissato come origine de' segmenti. Infatti, essendo O, A, B tre punti in linea retta, si ha

$$OA+AB+BO=0\ ,$$

donde

$$AB=OB-OA\ ,$$

o anche

$$AB=AO+OB\ .$$

4. Se $A, B, C, \ldots M, N$ sono n punti in linea retta, e se per essi sussiste il teorema espresso dall'eguaglianza:

$$AB+BC+\ldots+MN+NA=0\ ,$$

dico che lo stesso teorema sussiste per $n+1$ punti. Infatti, se O è un altro punto della stessa retta, fra i tre punti N, A, O avrà luogo la relazione

$$NA=NO+OA\ ,$$

dunque l'eguaglianza supposta diverrà

$$AB+BC+\ldots+MN+NQ+OA=0\ ,$$

c.d.d. Si è già dimostrato (N° 2) che il teorema è vero per $n=3$; dunque esso sussiste anche per $n=4$, ecc.

5. Il segno di un segmento AB non è determinato, se non sia già dato come positivo un segmento della medesima retta, la direzione del quale dicesi direzione positiva della retta.

Per due rette differenti, la direzione positiva dell'una è in generale indipendente dalla direzione positiva dell'altra. Ma se le due rette sono parallele, supporremo che le loro direzioni positive coincidano; cioè, che, fissata la direzione positiva della prima retta e trasportata questa parallelamente a sè stessa, fino a coincidere coll'altra retta, le direzioni positive delle due rette così sovrapposte siano identiche.

Da ciò segue che due segmenti paralleli AB, CD avranno segni uguali od opposti, secondo che la direzione da A verso B coincida o no colla direzione da C verso D. Per es., se $ABCD$ è un parallelogrammo, si ha

$$AB+CD=0\ ,\quad BC+DA=0\ .$$

Due segmenti uguali, paralleli e dello stesso senso diconsi **equipollenti** (*).

6. Se A, B, C, D sono quattro punti in linea retta, si ha identicamente.

$$AD.BC + BD.CA + CD.AB = 0 .$$

Infatti, i segmenti BC, CA, AB si possono esprimere come segue

$$BC = BD - CD ,$$
$$CA = CD - AD ,$$
$$AB = AD - BD ;$$

moltiplicando ordinatamente queste tre eguaglianze per AD, BD, CD e sommando i risultati, si ha appunto l'identità che si voleva dimostrare.

7. Siano p, q, r tre rette concorrenti in un punto O (fig. 4). Per un punto qualsivoglia M del piano tirisi una trasversale a segare p, q, r rispettivamente in A, B, C; si avrà pel teorema che precede

$$MA.BC + MB.CA + MC.AB = 0 .$$

Conducasi ora parallelamente alla trasversale ABC una retta che seghi le p, q, r in P, Q, R; siccome i segmenti BC, CA, AB sono proporzionali ai segmenti QR, RP, PQ, così l'eguaglianza ora ottenuta potrà scriversi

$$MA.QR + MB.RP + MC.PQ = 0 .$$

Se per un altro punto qualsivoglia M' si tirerà una nuova trasversale, nella direzione fissa PQR, la quale incontri le p, q, r in A', B', C', si avrà ancora

$$M'A'.QR + M'B'.RP + M'C'.PQ = 0 .$$

Vale a dire: Se per un punto qualunque M si conduce, in una data direzione, una trasversale che seghi in A, B, C tre date rette concorrenti in un punto, i segmenti MA, MB, MC sono legati fra loro dalla relazione

$$a.MA + b.MB + c.MC = 0$$

ove le a, b, c sono quantità costanti.

(*) BELLAVITIS, *Sposizione del metodo delle equipollenze* (Modena, 1854), n° 3. Non sono in grado di poter citare la prima Memoria del chiar.° Autore su questo argomento (1835).

Dal punto M si calino sulle tre rette p, q, r le perpendicolari MD, ME, MF; ed anche da un punto S fissato ad arbitrio nella PQR si abbassino sulle medesime rette date le perpendicolari SU, SV, SW. I triangoli simili MAD, SPU dànno

$$MA:MD=SP:SU\ ,$$

ossia

$$MA=\frac{SP}{SU}\cdot MD\ ,$$

ed analogamente

$$MB=\frac{SQ}{SV}\cdot ME\ ,$$

$$MC=\frac{SR}{SW}\cdot MF\ .$$

Ond'è che l'eguaglianza

$$MA\,.\,QR+MB\,.\,RP+MC\,.\,PQ=0$$

potrà anche scriversi così

$$MD\,.\,\frac{QR\,.\,SP}{SU}+ME\,.\,\frac{RP\,.\,SQ}{SV}+MF\,.\,\frac{PQ\,.\,SR}{SW}=0\ ,$$

vale a dire:

Se da un punto qualunque M si abbassano le perpendicolari MD, ME, MF su tre date rette concorrenti in un punto, sussiste la relazione

$$\alpha\,.\,MD+\beta\,.\,ME+\gamma\,.\,MF=0\ ,$$

ove le α, β, γ sono quantità costanti.

Le MD, ME, MF, in luogo d'essere perpendicolari alle rette date, potrebbero essere oblique in direzioni fissate ad arbitrio: si avrà ancora una relazione della stessa forma, mutati soltanto i valori delle α, β, γ; e la dimostrazione sussisterà inalterata.

La dimostrazione non suppone necessariamente che il punto di concorso delle p, q, r sia a distanza finita; perciò il teorema è vero anche se le tre rette date sono fra loro parallele.

8. In un dato piano si faccia un movimento circolare (fig. 5), cioè un punto si muova sopra una circonferenza, ovvero una retta ruoti intorno ad un suo punto fisso. Per un osservatore collocato al disopra del piano, il movimento avverrà o nel senso in cui si muovono le lancette di un orologio (fig. 5) o nel senso opposto. Il primo di questi due sensi si dirà senso positivo del piano;

l'altro senso negativo. Un arco della circonferenza si considererà come positivo o come negativo, secondo che il movimento suddetto si faccia nel senso positivo o nel senso negativo nel piano (cfr. N. 1).

Nel piano siano determinate le direzioni positive a, b di due rette (fig. 6). Ciò premesso, se la prima retta dee ruotare di γ gradi (intorno ad un suo punto supposto fisso, per es. intorno al punto ab, e nel senso positivo o nel senso negativo del piano, secondo il segno di γ), affinchè la sua direzione positiva coincida colla direzione positiva dell'altra, l'angolo indicato col simbolo ab si dirà essere di γ gradi. Segue da questa definizione che, invece di γ, si può anche porre $\gamma \pm 360°$, $\gamma \pm 2.360°$,... Se b dee ruotare di γ' gradi per sovrapporsi ad a, sarà analogamente l'angolo $ba = \gamma'$, ovvero $= \gamma' \pm 360°$,... Se la direzione positiva a ruotasse, prima di γ gradi, e poi di γ' gradi, finirebbe col sovrapporsi a sè stessa, come se avesse ruotato di 0°, 360°, 2.360°,...; dunque

$$ab + ba = 0°, \quad \text{oppure} \quad = 360°, \ldots$$

Infatti, è evidente che, se γ e γ' sono entrambi positivi, si ha $\gamma + \gamma' = 360°$; se entrambi negativi, $\gamma + \gamma' = -360°$; se di segno contrario, $\gamma + \gamma' = 0$.

Noi scriveremo

$$ab + ba = 0,$$

intendendo che allo zero, come a qualsivoglia angolo, si può aggiungere o togliere un numero arbitrario intero di circonferenze (di raggio $= 1$).

Dalle definizioni poste segue adunque, che ab e ba sono due angoli uguali ed opposti:

$$ab = -ba, \quad ba = -ab.$$

9. Nel piano siano date le direzioni a, b, c di tre rette, che potrò supporre condotte da uno stesso punto O e prolungate da una sola banda di esso: giacchè l'angolo di due rette è indipendente dalla loro posizione assoluta. Se, girando intorno ad O nel senso positivo del piano, si incontrano le tre rette nell'ordine acb (fig. 7), sarà identicamente

$$ca = cb + ba,$$

ossia

$$-cb + ca - ba = 0.$$

Ma

$$-cb = bc, \qquad -ba = ab;$$

dunque

$$bc + ca + ab = 0.$$

Se l'ordine di successione è abc (fig. 8), sarà

$$bc + ca = ba\,,$$

donde

$$bc + ca - ba = 0\,,$$

ossia

$$bc + ca + ab = 0\,.$$

Dunque:

Se a, b, c sono tre rette in uno stesso piano, qualunque sia la loro scambievole giacitura, sussiste sempre l'identità

$$bc + ca + ab = 0\,.$$

10. Di qui, analogamente a ciò che s'è veduto pei segmenti (N° 3), si cava l'espressione dell'angolo di due rette a, b, formata mediante gli angoli ch'esse fanno con una terza retta o, data ad arbitrio nel piano. Infatti, essendo le direzioni o, a, b in uno stesso piano, si ha

$$oa + ab + bo = 0,$$

donde

$$ab = ob - oa\,,$$

o anche

$$ab = ao + ob\,.$$

11. Se s'indica un angolo con tre lettere, simboli di punti, per es. BAC (fig. 9), si suppone che le direzioni positive dei lati vadano da A verso B e da A verso C; così che BAC è l'angolo delle rette AB, AC (acuto nella figura) mentre CAB è l'angolo (segnato nella figura dalla linea punteggiata) delle rette AC, AB, epperò

$$BAC + CAB = 0.$$

12. Tre punti ABC (non situati in linea retta) sono i vertici di un triangolo (fig. 10). Imaginiamo di percorrerne il contorno continuamente, cioè senza salti e senza ripassare più volte per uno stesso punto: ciascun vertice sarà allora il termine di un lato e l'origine del lato consecutivo. Ciò può farsi in due maniere, vale a dire in due sensi opposti; cioè nel senso ABC o nel senso ACB. Il senso BCA o CAB non differisce da ABC; e così non differisce CBA nè BAC da ACB. Nella figura 10 il senso ABC è il senso positivo del piano, ed ACB è il senso negativo. Gli angoli interni del triangolo sono BAC, CBA, ACB.

L'area del triangolo rimane a destra o a sinistra secondo che se ne percorra il contorno in senso positivo o in senso negativo; perciò le aree ABC, ACB si considerano come uguali ed opposte: positiva la prima, negativa la seconda. L'area ABC (o ACB) si può considerare come generata da un raggio di lunghezza variabile, un termine del quale sia fisso in A, mentre l'altro termine percorra il segmento BC (o CB). Ora tale rotazione avviene nel senso positivo (negativo) del piano; perciò anche l'area si considera come positiva (negativa) (*).

La condizione necessaria e sufficiente affinchè tre punti A, B, C siano in linea retta è che l'area ABC sia nulla.

13. Teorema. — Se O è un punto qualsivoglia del piano del triangolo ABC (fig. 10), si ha sempre l'identità

$$OBC + OCA + OAB = ABC \quad (^{**}).$$

Dimostrazione. — Se O è nell'interno del triangolo ABC, questo è appunto la somma de' triangoli OBC, OCA, OAB.

Se O è nell'angolo BAC, dall'altra parte del lato BC, si ha

$$OCA + OAB - OCB = ABC;$$

ma $$OCB = - OBC,$$

dunque $$OBC + OCA + OAB = ABC.$$

Finalmente, se O è nell'angolo opposto al vertice a BAC, si ha

$$OBC - OAC - OBA = ABC,$$

ossia

$$OBC + OCA + OAB = ABC,$$

c. d. d.

In virtù dell'osservazione fatta alla fine del N. 12, se tre punti A, B, C sono in linea retta, si avrà

$$OBC + OCA + OAB = 0$$

qualunque sia il punto O.

14. Da questo teorema segue che l'area del triangolo ABC si può riguardare come generata dal movimento di un raggio di lunghezza variabile (raggio vettore), un termine del quale sia fisso in O (polo), mentre l'altro termine percorra il contorno ABC nel senso dato.

(*) Möbius, *l. c.*, § 17.

(**) Möbius, *l. c.*, § 18.

Questa osservazione e il teorema precedente sussistono inalterati, anche se BC fosse, non già un segmento di retta, ma un arco di curva (*).

15. Se O è un punto qualunque nel piano del parallelogrammo $ABCD$ (fig. 11), si ha

$$OAB + OCD = \frac{1}{2} ABCD.$$

Infatti, indicato con S il punto in cui BC è incontrata dalla retta condotta per O parallelamente ad AB, si ha (N. 13)

$$SAB + SBC + SCA = ABC\,,$$

ma

$$SBC = 0\,, \qquad SCA = SCD\,,$$

$$SAB = OAB\,, \quad SCD = OCD\,,$$

dunque ecc. Siccome $\frac{1}{2} ABCD = DAB$, così l'equazione superiore può anche scriversi

$$ODC = OAB - DAB.$$

16. Siano (fig. 12), p, q, r tre rette formanti un triangolo ABC; O ed M due punti nel piano, il primo de' quali si consideri come fisso o dato, l'altro come variabile. Dai punti O, M si abbassino sulla p le parallele OU, MD, in una direzione prescelta ad arbitrio; e così pure sulla q le parallele OV, ME, e sulla r le parallele OW, MF, in direzioni fissate a volontà.

Le aree de' triangoli OBC, MBC sono proporzionali alle distanze che i vertici O, M hanno dalla base comune BC, epperò sono anche proporzionali ai segmenti OU, MD; dunque

$$OBC : MBC = OU : MD\,,$$

ossia

$$MBC = \frac{OBC}{OU} \,.\, MD\,,$$

ed analogamente

$$MCA = \frac{OCA}{OV} \,.\, ME\,,$$

$$MAB = \frac{OAB}{OW} \,.\, MF.$$

(*) E quindi anche se BC, CA, AB fossero tre archi non segantisi fra loro. Cfr. N. 19.

Ma (N. 13)

$$MBC + MCA + MAB = ABC,$$

dunque

$$\frac{OBC}{OU} . MD + \frac{OCA}{OV} . ME + \frac{OAB}{OW} MF = ABC.$$

Se facciamo variare il punto M nel piano, conservando le direzioni OU, OV, OW, nell'equazione precedente si alterano solamente le lunghezze MD, ME, MF; ne segue il teorema:

Se da un punto qualunque M nel piano di un dato triangolo si abbassano, sui lati di questo, le rette MD, ME, MF in direzioni date, queste rette sono legate dalla relazione (†)

$$\alpha . MD + \beta . ME + \gamma . MF = \delta;$$

dove le α, β, γ, δ sono quantità costanti.

Il teorema sussiste anche se due delle tre date rette p, q, r sono parallele fra loro. Siano p. es., q, r fra loro parallele; e conducasi una retta s, che non sia parallela alle q, r, nè alla p. Da un punto qualsivoglia M si abbassino, in direzioni fissate ad arbitrio, le MD, ME, MF, MG sulle p, q, r, s. Siccome le p, q, s formano un triangolo, così pel teorema ora dimostrato, le MD, ME, MG saranno legate da una relazione della forma (†), che scriveremo così:

$$\alpha MD + \beta ME + MG = \delta;$$

ed analogamente, siccome le p, r, s formano un triangolo, avremo fra le MD, MF, MG una relazione della stessa forma

$$\alpha' MD + \gamma MF + MG = \delta'.$$

Sottraendo quest'uguaglianza della precedente si ha

$$(\alpha - \alpha') MD + \beta ME - \gamma MF = \delta - \delta',$$

cioè le MD, ME, MF sono ancora legate da una relazione della forma (†), c. d. d.

Questo teorema è una generalizzazione di quello del N° 7, relativo a tre rette p, q, r concorrenti in un punto situato a distanza finita o infinita. In quel caso particolare la costante δ è zero.

17. Diciamo circuito la linea descritta da un punto che si muova in un piano, da una posizione (iniziale) ad un'altra (posizione finale), senza salti, cioè senza mai abbandonare il piano. Il

circuito è chiuso se la posizione finale coincide coll'iniziale; è aperto, nel caso contrario. Se il circuito interseca sè medesimo, i punti d'intersezione diconsi **nodi**, e il circuito dicesi **intrecciato**.

Se il circuito è formato da segmenti rettilinei, esso dicesi **linea poligonale** o semplicemente **poligono**.

Un circuito qualsivoglia, al pari del contorno di un triangolo (N. 12), può essere percorso in due sensi opposti; diremo **positivo** quello che coincide col senso positivo del piano. Affinchè sia dato il senso di un circuito, basta che si conosca l'ordine di successione di **due** suoi punti, se il circuito è aperto; di **tre**, se è chiuso.

18. Un circuito chiuso e senza nodi circoscrive una porzione **interna** e finita del piano, e la separa dalla porzione rimanente, che è **esterna** e infinita. La misura di cotesta regione interna è ciò che dicesi **area** del circuito, e considerasi come **positiva** o come **negativa**, secondo che essa si trovi a destra o a sinistra di una persona che, stando sul piano, percorra il circuito nel senso dato del medesimo; vale a dire, l'area è positiva o negativa secondo che il circuito è percorso nel senso positivo o nel senso negativo del piano (N. 12).

19. Teorema. — **Se** $ABCD\ldots MNA$ (fig. 13) **è un circuito chiuso qualsivoglia, ed** O **un punto nel piano, la somma di triangoli (o settori)**

$$\Sigma = OAB + OBC + OCD + \ldots + OMN + ONA$$

è una quantità costante, qualunque sia il punto O (*).

Dimostrazione. — Sia O' un altro punto nel piano; pel teorema del N° 13 sarà

$$\begin{aligned} O'AB &= OAB + OBO' + OO'A\ , \\ O'BC &= OBC + OCO' + OO'B\ , \\ O'CD &= OCD + ODO' + OO'C\ , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ O'MN &= OMN + ONO' + OO'M\ , \\ O'NA &= ONA + OAO' + OO'N\ , \end{aligned}$$

e sommando

$$\begin{aligned} &O'AB + O'BC + O'CD + \ldots + O'MN + O'NA \\ &= OAB + OBC + OCD + \ldots + OMN + ONA = \Sigma\ , \end{aligned}$$

(*) Möbius, *Baryc. Calcul*, § 165; *Statik* (Leipzig, 1837), § 45.

distruggendosi gli altri termini, perchè a due a due uguali e opposti, come $OO'A$ ed OAO', $OO'B$ ed OBO', ecc.

Si può considerare la grandezza Σ come generata dal movimento di un raggio (raggio vettore) di lunghezza variabile OX, che abbia un termine fisso nel polo O, mentre l'altro termine percorre il circuito dato nel senso dato.

20. Sia ω un elemento del piano, ossia una porzione piccolissima (infinitesima) in tutte le direzioni; s'imaginino quelle due posizioni (comprendenti un angolo infinitesimo) del raggio vettore che abbracciano entro di sè l'elemento ω. Di queste due posizioni indichiamo con $O\omega$ la prima, quella cioè, che per la prima è occupata dal raggio mobile OX, allorchè il punto X percorre il circuito nel senso dato. Sia X un punto del circuito, situato nel prolungamento di $O\omega$ (al di là di ω, rispetto ad O); e X' il punto, prossimo ad X, dove il circuito è incontrato dal secondo de' raggi vettori accennati di sopra, così che il punto descrivente il circuito occuperà prima la posizione X e, subito dopo, la posizione X'. Si dirà allora che l'intersezione X del circuito col prolungamento del raggio $O\omega$ è positiva o negativa, secondo che sia positiva o negativa (N. 18) l'area del settore elementare OXX', entro il quale è compreso ω. Delle intersezioni del circuito col prolungamento di $O\omega$, siano le positive in numero m, le negative in numero n; ciò vuol dire che de' settori elementari de' quali si compone la somma Σ e de' quali fa parte l'elemento ω, m sono positivi ed n negativi. E per conseguenza ω entrerà in Σ col coefficiente $m-n$.

Ora, dico che il coefficiente $m-n$ dell'elemento ω è costante, qualunque sia il polo O. Infatti, se un punto X percorre tutto il circuito nel senso dato, il raggio ωX (mobile intorno al centro dell'elemento ω) eseguirà una certa rotazione $\gamma+h\,.\,360°$ nel senso positivo, ed una certa altra rotazione $-\gamma'-k\,.\,360°$ nel senso negativo; e sarà $\gamma=\gamma'$, perchè la posizione finale del raggio ωX dee coincidere coll'iniziale. Ne segue che la rotazione complessiva di ωX sarà $(h-k)360°$, ossia un numero intero $h-k$, positivo o negativo, di circonferenze. Per ciascuna di queste circonferenze vi è una (una sola) posizione del raggio ωX, il cui prolungamento al di là di ω passi per O; vale a dire, il numero delle volte che il raggio vettore OX passa per ω è eguale al numero $h-k$ de' giri che il circuito fa intorno ad ω. Ma il numero delle volte che OX passa per ω è il coefficiente $m-n$ dell'elemento ω, relativamente al polo O; dunque $m-n=h-k$, ossia il coefficiente $m-n$ è indipendente dalla scelta del polo O.

21. Un dato circuito chiuso ed intrecciato (fig. 13) divide il piano in un certo numero di spazi finiti S_1, S_2,.. contigui l'uno all'altro, ciascuno de' quali ha un circuito non intrecciato; sicchè l'intero piano consta di questi spazi e della residua regione (esterna) infinita, che indicheremo con S_0.

Siano ω, ω' due elementi del piano, i quali si possano congiungere con una retta, senz'attraversare il circuito, e prendasi il polo O sopra uno dei prolungamenti della retta...$\omega\omega'$... È evidente che il raggio OX non potrà percorrere ω senza percorrere simultaneamente ω' nello stesso senso; onde ω ed ω' entreranno in Σ col medesimo coefficiente. Uguali coefficienti avranno anche gli elementi ω'', ω''', ..., se il circuito non passa fra ω' ed ω'', fra ω'' ed ω''',...; e siccome in questo modo possiamo assumere successivamente tutti gli elementi di uno stesso spazio S, così tutti gli elementi di S entreranno in Σ con un coefficiente comune c. Ciò vuol dire che S entrerà in Σ col coefficiente c; onde, se c_1, c_2, ... sono i coefficienti analoghi per gli spazi S_1, S_2, ..., avremo

$$\Sigma = c_1 S_1 + c_2 S_2 + \ldots$$

intendendo che S_1, S_2, ... esprimano anche le aree degli spazi rappresentati con questi simboli.

Ora siano ω, ω_1 due elementi fra i quali il circuito passi una volta; e chi percorra il circuito nel senso dato, passando fra ω ed ω_1, abbia ω alla destra ed ω_1 alla sinistra. Prendasi il polo O sul prolungamento della retta $\omega_1\omega$...; allora, se X percorre quel tratto di circuito che passa fra ω ed ω_1, il raggio OX descriverà una volta ω con rotazione positiva, senza descrivere ω_1; mentre, per tutte le altre parti del circuito, gli elementi ω ed ω_1 saranno descritti simultaneamente e nello stesso senso. Dunque il coefficiente di ω supererà di 1 quello di ω_1; ossia, se, passando da uno spazio ad un altro contiguo, si attraversa (una volta) il circuito da destra a sinistra (*), il coefficiente del primo spazio supera di 1 quello dell'altro.

Alla regione infinita S_0 compete il coefficiente zero; infatti, se ω_0 è un elemento situato fuori degli spazi S_1, S_2, ..., è chiaro che si potrà dare al polo O una posizione tale che il raggio (finito) OX non passi mai per ω_0, qualunque sia il punto X del circuito.

Ad uno spazio, dal quale si possa arrivare ad S_0 attraversando

(*) S'intende sempre da destra a sinistra di chi percorre il circuito nel senso dato: senso che nella figura è espresso da una freccia.

una sola volta il circuito, competerà il coefficiente $+1$ o -1, secondo che il passaggio si faccia da destra a sinistra o da sinistra a destra. In generale, se da un punto di uno spazio S si tira una retta sino ad un punto di S_0, e se questa retta attraversa il circuito m volte da destra a sinistra ed n volte da sinistra a destra, il coefficiente di S sarà $m-n$.

22. Se il circuito non ha alcun nodo, avremo un solo spazio finito S, e ad esso spetterà il coefficiente $+1$ o -1, secondo che il circuito si percorra positivamente (fig. 14) o negativamente (fig. 15). In questo caso avremo dunque

$$\Sigma = \pm S ,$$

ossia: se il circuito non è intrecciato, la somma Σ non è altro che l'area dello spazio entr'esso compreso.

Questa proprietà suggerisce naturalmente di assumere la quantità Σ come definizione dell'area di un circuito intrecciato qualsivoglia (*).

23. Un circuito intrecciato può essere decomposto in circuiti non intrecciati, e ciò col disgiungere gli angoli (curvilinei) formati dai rami che concorrono in ciascun nodo, senza però alterare i sensi (le direzioni delle frecce) de' rami medesimi. Veggansi per es. le fig. 16 e 17, in ciascuna delle quali un circuito intrecciato è decomposto in due circuiti ordinari, e la fig. 18, dove un circuito intrecciato si risolve in quattro circuiti ordinari. Allora gli spazi con coefficienti negativi si staccano affatto da quelli i cui coefficienti sono positivi; e di due spazi con coefficienti d'ugual segno, quello il cui coefficiente ha un valore assoluto maggiore riesce tutto compreso dentro all'altro. Cioè, indicato con S_r lo spazio il cui coefficiente è r, sarà S_2 compreso entro S_1; S_3 compreso entro S_2, . . . , S_{-2} entro S_{-1}, ...

Da ciò segue che l'area Σ si può ottenere come somma di spazi tutti aventi per coefficiente l'unità positiva o negativa. A tale uopo, basta che l'area S_r si prenda una volta da sè, isolata, e un'altra volta insieme coll'area S_{r-1}, entro la quale è contenuta, cioè si assumano gli spazi S_r ed $S_{r-1}+S_r$, invece di $2S_r$ ed S_{r-1}, ecc. Vedi la fig. 18, dove l'area è

$$S_3+(S_2+S_3)+(S_1+S_2+S_3)-S_{-1} \quad (**).$$

(*) Möbius, *Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders* (Rendiconti della Società delle scienze di Lipsia, 1865), § 13 e segg.

(**) Culmann, *Graphische Statik* (Zürich, 1866), N. 14.

Per area di un sistema di circuiti chiusi s'intende la somma (algebrica) delle aree de' singoli circuiti. Per es. l'anello compreso fra le due curve ovali della figura 19 è l'area dei circuiti ABC, $A'C'B'$; invece l'area de' circuiti ABC, $A'B'C'$ (fig. 20) è uguale all'anello più due volte l'area interna $A'B'C'$. In entrambi i casi si può sostituire ai due circuiti un circuito unico, $AA'C'B'BCA$ (fig. 19) od $AB'C'A'BCA$ (fig. 20), dove i punti B, B' s'intendano prossimi risp. ad A, A'. Nella fig. 21 i due circuiti s'intersecano; l'area de' circuiti ABC, $A'B'C'$ equivale a quella de' circuiti $AA'B'C$, $ABB'C'$; e nella fig. 22 l'area de' circuiti ABC, $A'B'C'$ equivale a quella de' circuiti $ABA'B'$, $AC'A'CA$. I due circuiti possono essere surrogati da un circuito unico.

24. Teorema. — Se i segmenti rettilinei A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... A_nB_n, dati di grandezza e posizione in un piano, sono equipollenti ai lati di un poligono (cioè di un circuito rettilineo chiuso, comunque intrecciato), la somma dei triangoli

$$OA_1B_1 + OA_2'B_2 + OA_3B_3 + \dots + OA_nB_n$$

è costante, qualunque sia il punto O. Ma se i dati segmenti non sono equipollenti ai lati di un circuito chiuso, quella somma non si mantiene costante che pei punti O equidistanti da una retta determinata (*).

Dimostrazione. — Si costruisca la spezzata $CDE\dots MN$ i cui lati successivi CD, DE, ... MN siano equipollenti ai dati segmenti A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... A_nB_n; così che le figure A_1B_1DC, A_2B_2ED, ..., A_nB_nNM saranno parallelogrammi.

Siccome pel N° 15 si ha

$$OA_1B_1 = OCD - A_1CD\ ,$$
$$OA_2B_2 = ODE - A_2DE\ ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$OA_nB_n = OMN - A_nMN\ ,$$

e pel teorema del N. 19

$$OCD + ODE + \dots + OMN + ONC = CDE\dots MNC,$$

così si otterrà addizionando

$$OA_1B_1 + OA_2B_2 + \dots + OA_nB_n = CDE\dots NC + OCN$$
$$- (A_1CD + A_2DE + \dots + A_nMN).$$

(*) Apollonio, *Luoghi piani*, lib. I. — L'Huilier, *Polygonometrie*, 1789, p. 92. — Möbius, *Statik*, § 46.

Se i segmenti equipollenti ai dati formano un poligono chiuso, cioè se il punto N coincide con C, l'area OCN è nulla, epperò la somma

$$OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots + OA_nB_n$$

ha un valore indipendente dal punto O.

Se N non coincide con C, la detta somma si conserverà invariabile, finchè non cambi di area il triangolo OCN, ossia finchè il punto O conservi la stessa distanza dalla retta CN.

Cambiando questa distanza, si assuma il nuovo polo O'; avremo

$$O'A_1B_1 + O'A_2B_2 + \ldots + O'A_nB_n$$
$$= CDE \ldots NC + O'CN - (A_1CD + A_2DE + \ldots).$$

Prendendo il punto O' ad una tal distanza da CN, che l'area del triangolo $O'CN$ risulti uguale ad

$$A_1CD + A_2DE + \ldots - CDE \ldots NC ,$$

sarà zero la somma

$$O'A_1B_1 + O'A_2B_2 + \ldots + O'A_nB_n .$$

La retta (parallela a CN) che è luogo dei punti O', pei quali cotesta somma è nulla, si denoti con r. Se in essa s'intendesse preso il punto C, cioè l'origine arbitraria della spezzata $CDE \ldots$, sarebbe nulla l'area $O'CN$, epperò la somma dei triangoli

$$A_1CD + A_2DE + \ldots + A_nMN \ldots$$

diverrebbe uguale all'area $CDE \ldots NC$. Mantenuta questa scelta dell'origine C, cioè supposto che C sia un punto della retta r, per un punto qualsivoglia O, si avrà

$$OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots = OCN .$$

25. Nel caso particolare che i segmenti dati abbiano tutti l'origine comune C, la somma dei triangoli

$$A_1CD + A_2DE + \ldots + A_nMN ,$$

ossia:

$$CDE + \ldots + CMN$$

è identica coll'area del poligono $CDE \ldots NC$ (N. 22); dunque l'origine comune C sarà eziandio un punto della retta r. Ciò torna a dire che in questo caso r coincide colla CN, che congiunge gli estremi della spezzata $CDE \ldots MN$.

La stessa conclusione vale se i segmenti dati appartengono a rette tutte concorrenti in uno stesso punto C; giacchè al triangolo OA_rB_r possiamo sostituire OCB'_r, quando i segmenti A_rB_r e CB'_r appartengano ad una stessa retta e siano uguali in grandezza e senso.

26. Da questa proprietà della retta r, pel caso che i segmenti dati appartengano a rette concorrenti in uno stesso punto, si cava una maniera di costruire la retta r anche nel caso generale, che i segmenti dati siano disposti comunque nel piano. Sia C il punto in cui s'incontrano A_1B_1, A_2B_2; e coll'origine C si costruisca il triangolo CDE, i cui lati CD, DE siano equipollenti ad A_1B_1, A_2B_2; allora, per quello che or ora si è dimostrato, sarà (qualunque sia il polo O)

$$OCE = OA_1B_1 + OA_2B_2 .$$

Sia ora P il punto in cui CE incontra A_3B_3; e coll'origine P si costruisca il triangolo PQR, i cui lati PQ, QR siano equipollenti a CE, A_3B_3; sarà:

$$\begin{aligned} OPR &= OCE + OA_3B_3 \\ &= OA_1B_1 + OA_2B_2 + OA_3B_3 . \end{aligned}$$

E così di seguito, finchè da ultimo si giungerà ad un segmento AB tale che $OAB = OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots + OA_nB_n$.

Questo segmento AB apparterrà alla retta cercata r, e sarà equipollente alla CN che congiunge i termini della spezzata $CDE \ldots MN$, avente i suoi lati ordinatamente equipollenti ai segmenti dati.

27. Siccome tutt' i punti O, pei quali la somma

$$OA_1B_1 + OA_2B_2 \ldots + OA_nB_n$$

ha uno stesso valore, sono in una retta determinata (N. 24), così unica è la retta r, luogo dei punti O pei quali la predetta somma è nulla. Di qui consegue che, qualunque sia l'ordine col quale si prendono i segmenti dati nella costruzione che precede, si perverrà sempre ad una sola e medesima retta r.

II.

Addizione grafica.

28. S o m m a r e geometricamente o c o m p o r r e più segmenti 1, 2, 3, ... n, dati in grandezza e direzione, significa costruire un circuito poligonale i cui lati siano ordinatamente equipollenti ai segmenti dati (fig. 23).

La retta $S_{1,\dots n}$, che va dall'origine al termine del circuito così costruito, dicesi **somma geometrica** o **risultante** de'segmenti dati (*); e questi diconsi le **componenti** di quella.

Se i segmenti dati sono tutti fra loro paralleli, il circuito poligonale si riduce ad una linea retta o punteggiata, i cui segmenti consecutivi 01, 12, 23,... (fig. 24), ovvero 11, 22, 33,... (fig. 25) sono ordinatamente equipollenti ai dati. In questo caso, la risultante de' segmenti dati coincide colla loro somma algebrica. Le due figure indicano due maniere di designare una serie di segmenti che si succedono consecutivamente in linea retta.

29. Dalla definizione ora esposta segue, che la risultante $S_{1,\dots n}$ degli n segmenti dati 1, 2, ..., n è identica colla risultante dei due segmenti $S_{1,\dots r}$, $S_{r+1,\dots n}$, il primo de'quali sia la risultante dei primi r segmenti dati, ed il secondo sia la risultante degli n-r rimanenti. Infatti: le rette $S_{1,\dots n}$, $S_{1,\dots r}$ hanno l'origine comune col segmento 1; e le rette $S_{1,\dots n}$, $S_{r+1,\dots n}$ hanno il termine comune col segmento n; dunque $S_{1,\dots n}$ comincia insieme con $S_{1,\dots r}$ e termina insieme con $S_{r+1,\dots n}$. La fig. 26 corrisponde ad $n=8$, $r=5$, cioè mostra che la risultante de'segmenti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 coincide colla somma geometrica di due sole componenti, una delle quali è la risultante de'segmenti 1, 2, 3, 4, 5, e l'altra è la risultante de' segmenti 6, 7, 8.

Di qui s'inferisce che, se si ripartono i segmenti dati (presi sempre consecutivamente, cioè nell'ordine dato) in un numero qualunque di gruppi, e se si compongono i segmenti in ciascun gruppo, le somme o risultanti parziali così ottenute saranno segmenti, la cui risultante sarà appunto la risultante di tutt'i segmenti dati.

30. La risultante di più segmenti dati è indipendente dalla posizione del punto che si assume come origine del circuito. Infatti, i circuiti che si costruirebbero con due origini diverse O, O' sono figure uguali (congruenti) ed ugualmente poste, e la seconda si può ottenere facendo scorrere la prima in modo che ogni suo punto descriva una retta equipollente alla retta OO' (fig. 27).

31. **Teorema.** — La risultante $S_{1,\dots n}$ di più segmenti dati 1, 2, 3,... n è indipendente dall'ordine col quale si fa la composizione.

Cominciamo dal dimostrare che si possono fra loro scambiare due segmenti consecutivi, p. e. 3, 4 (fig. 28). Nell'ordine dato, la risul-

(*) Chelini, *Saggio di geometria analitica, trattata con nuovo metodo* (Roma, 1838), p. 35. — Bellavitis, *l. c.*, N. 5. — Culmann, *l. c.*, p. 4.

tante di tutti i segmenti è anche la risultante delle tre risultanti parziali $S_{1,2}$, $S_{3,4}$, $S_{5,\dots n}$. Nel nuovo ordine, la risultante di tutti i segmenti sarà analogamente la risultante delle risultanti parziali $S_{1,2}$, $S_{4,3}$, $S_{5,\dots n}$. Ora $S_{3,4}$ e $S_{4,3}$ sono una stessa retta, diagonale del parallelogrammo che si ottiene conducendo prima due segmenti consecutivi equipollenti ai dati 3, 4, e poi, a partire dalla stessa origine, due altri segmenti consecutivi equipollenti agli stessi dati, scambiati di posto, 4′, 3′. Dunque la permutazione de'segmenti 3,4 non altera punto la risultante cercata.

Permutando fra loro, prima 3 con 4, poi 3 con 5, indi 5 con 4, l'effetto totale sarà d'avere scambiati fra loro 3 e 5 (fig. 29). In generale, lo scambio di due segmenti qualisivogliano non consecutivi si ottiene mediante scambi di segmenti consecutivi.

Dunque la risultante di più segmenti rimane inalterata se si scambiano fra loro due segmenti qualisivogliano; ossia la risultante è indipendente dall'ordine col quale i segmenti sono composti.

La fig. 30 mostra diversi circuiti formati cogli stessi segmenti, presi in diversi ordini, 12345, 13254, 15234.

32. Se coi segmenti dati si può formare un circuito chiuso, la stessa proprietà possederanno, in virtù del teorema che precede, tutti i circuiti che si ottengono mutando l'ordine di composizione. In questo caso, la risultante de' segmenti proposti è nulla.

Ossia, la risultante di più segmenti è nulla quando essi sono equipollenti ai lati di un poligono chiuso.

Il più semplice caso in cui la risultante è nulla è quello di due soli segmenti, l'uno de' quali sia equipollente all'altro preso in senso opposto.

33. Se fra i segmenti de' quali si domanda la risultante, ve ne sono alcuni coi quali si possa formare un poligono chiuso, tutti questi potranno essere ommessi senza alterazione della risultante cercata. Nella fig. 31 la risultante de'segmenti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 coincide colla risultante de'segmenti 1, 2, 8, 9, perchè la risultante di 3, 4, 5, 6, 7 è zero.

34. Due serie di segmenti hanno risultanti uguali (equipollenti) quando, costruiti con una stessa origine il circuito corrispondente all'una e il circuito corrispondente all'altra, i termini de'due circuiti coincidano (fig. 32). Se si compongono i segmenti dell'una serie insieme coi segmenti dell'altra, presi in senso opposto, la risultante totale sarà zero.

35. Due serie di segmenti hanno risultanti uguali ed opposte di senso allorchè, costruiti i corrispondenti circuiti poligonali in modo

che l'origine del secondo cada nel termine del primo, anche il termine del secondo coincida coll'origine del primo. Componendo i segmenti dell'una serie insieme con quelli dell'altra, la risultante totale sarà nulla. Viceversa, se la risultante di più segmenti è nulla, componendo questi in due gruppi distinti, la risultante del primo gruppo sarà uguale ed opposta a quella del secondo.

36. La sottrazione non è un'operazione distinta dall'addizione. Sottrarre un segmento 1 da un segmento 2 significa comporre il segmento 2 con un segmento equipollente all'1 preso in senso opposto.

37. Se due serie di segmenti hanno risultanti uguali (equipollenti), aggiungendo o togliendo ad entrambe uno stesso segmento, si otterranno due nuove serie le cui risultanti saranno ancora uguali (equipollenti).

38. Dato un segmento AB (fig. 33) e data una retta r, se per A e B si conducono in una direzione fissata ad arbitrio due rette parallele sino a segare la r in due punti A', B', questi punti A', B' diconsi *projezioni* dei punti A, B, ed il segmento $A'B'$ dicesi *projezione* del segmento AB. Le rette AA', BB' diconsi *raggi projettanti*.

Le projezioni di due segmenti equipollenti sono fra loro equipollenti (purchè non si cambi la direzione di r, nè quella de'raggi projettanti).

39. Sia (fig. 34) $ABC\ldots MNA$ un circuito chiuso, ed A', B', C', $\ldots M', N'$ le projezioni de' suoi vertici. Essendo $A', B', \ldots$ punti in linea retta, si ha (N° 4) $A'B'+B'C'+\ldots+M'N'+N'A'=0$; dunque *la somma delle projezioni dei lati di un circuito chiuso è zero*.

Siano A_1B_1, $A_2B_2, \ldots A_nB_n$, n segmenti dati in un piano, la cui risultante sia nulla; vale a dire, n segmenti che abbiano le grandezze e le direzioni dei lati di un poligono chiuso. Siccome le projezioni dei lati di un poligono chiuso hanno la somma nulla, e siccome le projezioni di due segmenti equipollenti sono uguali fra loro, così la somma delle projezioni de' segmenti dati sarà zero.

Più segmenti dati ed un altro segmento, il quale sia uguale ed opposto alla risultante di quelli, costituiscono un sistema di segmenti, la cui risultante è nulla; per conseguenza:

La projezione della risultante di più segmenti dati è uguale alla somma delle projezioni de' segmenti dati medesimi.

Di qui si conclude tosto:

Se due serie di segmenti hanno risultanti uguali, la somma delle projezioni de' segmenti dell'una serie sarà uguale alla somma delle projezioni de' segmenti dell'altra serie.

40. Siano (fig. 35) $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, ... $A_n B_n$, n segmenti dati in un piano, la risultante de' quali sia nulla. Assunto un punto arbitrario O, si potrà considerare $A_r B_r$ come risultante de' segmenti $A_r O$, $O B_r$; dunque sarà nulla la risultante de' segmenti $A_1 O$, $O B_1$, $A_2 O$, $O B_2$, ..., $A_n O$, $O B_n$; vale a dire (N. 35) la risultante dei segmenti $O A_1$, $O A_2$, ... $O A_n$ sarà uguale a quella de' segmenti $O B_1$, $O B_2$, ..., $O B_n$.

Viceversa, dati due gruppi di n punti $A_1 A_2 \ldots A_n$, $B_1 B_2 \ldots B_n$, se la risultante delle rette OA_1, OA_2, ..., OA_n che congiungono un polo O ai punti del primo gruppo è uguale alla risultante delle rette OB_1, OB_2, ... OB_n che dallo stesso polo vanno ai punti del secondo gruppo, sarà nulla la risultante de' segmenti $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, ..., $A_n B_n$ che congiungono i punti dell'un gruppo con quelli dell'altro. (In quest'operazione si possono combinare affatto ad arbitrio i punti dell'un gruppo con quelli del secondo, purchè nessun punto sia tralasciato nè adoperato più d'una volta). Infatti, dall'ipotesi segue (N. 34) essere nulla la risultante de' segmenti $A_1 O$, $A_2 O$, ..., $A_n O$, OB_1, OB_2, ..., OB_n; ma la risultante di $A_r O$ ed OB_r è $A_r B_r$; dunque sarà anche nulla la risultante dei segmenti $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, ... $A_n B_n$.

41. Di qui segue, pel primo teorema (N. 39), che, assunto un nuovo polo O', la risultante de' segmenti $O'A_1$, $O'A_2$, ..., $O'A_n$ sarà uguale alla risultante di $O'B_1$, $O'B_2$, ..., $O'B_n$. Dunque (*):

Se due gruppi di n punti $A_1 A_2 \ldots A_n$, $B_1 B_2 \ldots B_n$ sono tali che, assunto un polo O, la risultante de' segmenti OA_1, OA_2, ..., OA_n sia uguale a quella de' segmenti OB_1, $OB_2 \ldots OB_n$, la medesima uguaglianza avrà luogo per qualsivoglia altro polo O'. Inoltre sarà nulla la risultante degli n segmenti che congiungono i punti dell'un gruppo con quelli dell'altro, presi in ordine arbitrario.

42. Ritenuta l'ipotesi fatta pei due gruppi di n punti, si projettino questi in $A'_1 A'_2 \ldots A'_n$, $B'_1 B'_2 \ldots B'_n$ su di una retta r, mediante raggi paralleli ad una direzione fissata ad arbitrio. Preso

(*) Grassmann, *Die Ausdehnungslehre* (Leipzig, 1844), p. 41.

il polo O nella retta r (*), il raggio OA_r si può considerare come nato dalla composizione dei due OA'_r, A'_rA_r, ecc.; dunque la risultante de' segmenti OA'_1, OA'_2, ..., OA'_n, A'_1A_1, A'_2A_2,... A'_nA_n sarà uguale alla risultante di OB'_1, OB'_2, ... OB'_n, B'_1B_1, B'_2B_2, ... B'_nB_n. Ma (N. 38) la risultante o somma de' segmenti OA'_1, OA'_2, ..., OA'_n è uguale a quella de' segmenti OB'_1, OB'_2, ... OB'_n, perchè tutti questi segmenti sono le projezioni di due serie d'altri segmenti, le cui risultanti sono uguali. Dunque:

Se due gruppi di n punti A_1A_2..., A_n, B_1B_2..., B_n sono tali che, assunto un polo O, la risultante de' segmenti OA_1, OA_2,... OA_n sia uguale alla risultante de' segmenti OB_1, OB_2, ..., OB_n, e se si projettano tutti quei punti sopra una medesima retta, con raggi paralleli ad una direzione scelta ad arbitrio, la somma de' raggi projettanti i punti del primo gruppo sarà uguale alla somma de' raggi projettanti i punti del secondo gruppo.

43. Fin qui abbiamo definita la risultante di più segmenti, tenendo conto solamente della grandezza, della direzione e del senso, non già della posizione assoluta. Daremo ora un'altra definizione più generale, che comprende in sè quella che precede (N. 28) e dà tutti gli elementi della retta risultante di n segmenti dati.

Dati (in grandezza, posizione e senso) n segmenti A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, per risultante de' medesimi intenderemo un segmento AB di tale grandezza, posizione e senso che, per qualsivoglia polo O, l'area OAB sia uguale alla somma delle aree $OA_1B_1+OA_2B_2+ \dots +OA_nB_n$ (N. 24, 27).

44. Per brevità di linguaggio diciamo che il triangolo OAB è il triangolo che da O projetta il segmento AB. Il senso AB di questo segmento indica il modo in cui è percorso il circuito OAB, epperò indica il segno dell'area OAB.

Ciò premesso, possiamo dire: che per risultante di più segmenti dati s'intende un segmento tale che l'area del triangolo che lo projetta da un polo arbitrario O sia uguale alla somma delle aree dei triangoli che dallo stesso polo projettano i segmenti dati.

(*) Veggasi la fig. 35, dove s'imagini trasportata la retta r in modo che i punti O, O' vengano a coincidere insieme.

Siccome l'area del triangolo OAB non cambia se si fa scorrere il segmento AB sulla retta cui appartiene, così la risultante di più segmenti dati non cambia se questi scorrono arbitrariamente, ciascuno sulla retta cui appartiene.

45. Già dal teorema del N° **24** emerge che, se si costruisce un circuito poligonale $CDE \ldots MN$, i cui lati CD, $DE \ldots$, MN siano ordinatamente equipollenti alle date rette A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, il segmento NC sarà equipollente alla risultante AB. Se il circuito riesce chiuso, cioè se N cade in C, e se la somma delle aree $OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots + OA_nB_n$ non è zero, la risultante cercata ha una grandezza nulla ed è situata a distanza infinita. Se il circuito è chiuso, e se inoltre è nulla la somma anzidetta, la risultante è nulla in grandezza e indeterminata di posizione; vale a dire, in questo caso la data serie di segmenti non ammette una risultante.

46. Ma se N non coincide con C, il problema è risoluto, in modo unico, da un segmento AB di grandezza finita e situato a distanza finita. Poichè già se ne conoscono grandezza, direzione e senso, per individuarne la posizione, basterà trovare un punto della retta di cui esso è parte. A quest' uopo potrà servire la costruzione del N° **26**, ovvero la seguente, assai più semplice (fig. 36).

Si cominci dal costruire un circuito poligonale, i cui lati, che ora indicheremo coi numeri **1**, **2**, ..., n, siano ordinatamente equipollenti ai segmenti dati; la risultante sarà equipollente al segmento 0 rovesciato di senso, che chiude il circuito, cioè, sarà uguale ed opposta al segmento che dal termine del lato n va all' origine del lato **1**. Assunto ad arbitrio un punto U, da esso si conducano i raggi UV_{01}, UV_{12}, UV_{23}, ..., UV_{n0} (*) ai vertici del circuito: dove $V_{i.i+1}$ indica il vertice che è termine del lato i (equipollente ad A_iB_i) e origine del lato $i+1$ (equipollente ad $A_{i+1}B_{i+1}$).

Poi si costruisca un secondo circuito poligonale, i cui vertici **1**, **2**, ..., n cadano ordinatamente nelle rette cui appartengono i segmenti dati A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ed i cui lati 0**1**, **12**, ..., n0 siano ordinatamente paralleli ai raggi UV_{01}, UV_{12}, ..., UV_{n0}. I lati estremi 0**1**, n0, prolungati opportunamente, si segheranno in un punto 0, il quale dico appartenere alla retta risultante domandata (**).

Dimostrazione. — Immagino il segmento A_1B_1 decomposto in due, situati nei lati 0**1**, **12** del secondo poligono ed equipollenti ai raggi $V_{01}U$, UV_{12} del primo. Poi imagino il segmento A_2B_2 decomposto

(*) Nella fig. 36 sono tralasciate tutte le lettere V, A, B; ed è $n=4$.
(**) Culmann, *l. c.*, N. 87.

del pari in due segmenti, situati nei lati 12, 23 del secondo poligono ed equipollenti ai raggi $V_{12}U$, UV_{23}. E così di seguito, finchè da ultimo, A_nB_n venga decomposto in due segmenti situati nei lati $n-1.n$, $n0$ ed equipollenti ai raggi $V_{n-1.n}U$, UV_{n0}.

Preso ad arbitrio un polo O, l'area del triangolo che da esso projetta uno de' segmenti dati, sarà uguale alla somma dei due triangoli che dallo stesso polo projettano i due segmenti componenti; per conseguenza la risultante degli n segmenti dati A_1B_1, A_2B_2, . . . , A_nB_n coinciderà colla risultante dei $2n$ segmenti componenti, ne' quali i dati sono stati decomposti. Ora, il primo di questi $2n$ segmenti è situato in 01 ed equipollente a $V_{01}U$; l'ultimo è situato in $n0$ ed equipollente ad UV_{n0}; mentre tutti gli altri, in numero di $2(n-1)$, sono due a due uguali, opposti e situati in uno stesso lato del secondo poligono. Per es. il secondo e il terzo de' segmenti componenti giacciono nel lato 12, e sono rispettivamente equipollenti ad UV_{12} ed a $V_{12}U$.

Le aree dei due triangoli che da O projettano questi due segmenti sono uguali opposte; perciò la risultante de' segmenti dati non è altro che la risultante de' due segmenti componenti, primo ed ultimo, l'uno situato in 01 ed equipollente a $V_{01}U$; l'altro situato in $n0$ ed equipollente ad UV_{n0}. Ma la retta risultante di due segmenti passa pel punto comune alle rette cui questi appartengono (N. 25); dunque la risultante cercata passa pel punto comune ai lati estremi 01, $n0$ del secondo poligono.

47. Se il punto U fosse stato preso in linea retta coi punti estremi V_{01}, V_{n0} del primo circuito; sarebbero riusciti coincidenti i raggi estremi UV_{01}, UV_{n0}, epperò paralleli i lati estremi 01, $n0$ del secondo poligono. In questo caso adunque la costruzione non dà un punto a distanza finita della risultante domandata. Ma si rimedierebbe tosto a siffatto inconveniente, assumendo un nuovo punto U', fuori della retta V_{01}, V_{n0}, e quindi procedendo com'è detto sopra.

48. Se non che, può accadere (fig. 37) che il punto V_{n0} coincida con V_{01}; e allora, qualunque sia il punto U, i raggi estremi sono sovrapposti l'uno all'altro, epperò i lati 01, $n0$ o saranno paralleli, o saranno coincidenti. Se sono paralleli, la somma $OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots$ sarà uguale alla somma di due triangoli aventi il vertice in O, e le basi situate nei predetti lati 01, $n0$ ed equipollenti ai raggi uguali ed opposti $V_{01}U$, UV_{01}; ossia (N° 15) uguale alla metà di un parallelogrammo, due lati opposti del quale siano codeste basi medesime. In questo caso la risultante è nulla e situata a distanza infinita.

49. Invece (fig. 38) se i lati 01, $n0$ coincidano, cioè se coincidono i lati opposti del parallelogrammo, la somma $OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots$ è nulla. In questo caso, uno qualunque de' segmenti dati, rovesciato di senso, è la risultante degli altri $n-1$ segmenti.

50. Suppongansi (fig. 39) i dati segmenti A_1B_1, A_2B_2, ... tutti paralleli fra loro. In questo caso, il primo circuito poligonale V_{01} V_{12} V_{23} ... V_{n0} si riduce ad una linea retta; ma del resto la costruzione del secondo poligono rimane la stessa come nel caso generale. La risultante è parallela alle componenti.

51. Se i segmenti sono due soli, A_1B_1, A_2B_2, la costruzione può ridursi alla seguente (fig. 40 e 41). Nella retta indefinita A_1B_1 ... prendasi un segmento CD equipollente ad A_2B_2, e nella retta indefinita A_2B_2 ... un segmento $C'D'$ equipollente ad A_1B_1. Il punto O comune alle CD', $C'D$ apparterrà alla risultante, che si cerca. Infatti, conducasi $D'E$ parallela a $C'D$ e congiungansi O, E. Allora C, D, E rappresentano i vertici V_{01}, V_{12}, V_{20} del primo circuito, ed O fa le veci del punto U; i punti D', E sono i vertici 1, 2 del secondo poligono, che qui è il triangolo $OD'E$; ed O rappresenta anche il punto di concorso de' lati estremi di questo secondo poligono medesimo.

Dai triangoli simili OCD, $OD'C'$ si ha:

$$OC' : OD = C'D' : DC$$

$$= A_1B_1 : B_2A_2 \ ,$$

vale a dire: la risultante di due segmenti paralleli ha da essi distanze, il cui rapporto è reciproco di valore e opposto di segno a quello dei segmenti componenti.

III.

Moltiplicazione.

52. Moltiplicare una retta a pel rapporto di due altre rette $b : c$ significa trovare una quarta retta x in modo che sussista la proporzione geometrica:

$$c : b = a : x \ .$$

A quest'uopo basta costruire due triangoli OLM, $O'PQ$ simili, de' quali

il primo abbia due linee (due lati, ovvero base e altezza, ecc.), uguali o proporzionali a c, b; ed il secondo abbia la linea a omologa a c; sarà allora x la linea del secondo triangolo omologa a b; ovvero

il primo abbia due linee uguali o proporzionali a c, a; ed il secondo la linea b omologa a c; sarà allora x la linea del secondo triangolo omologa ad a.

53. La collocazione rispettiva de' due triangoli è del tutto arbitraria; e il fare una scelta o un'altra può dar luogo a diverse costruzioni. La scelta è per lo più suggerita dalla posizione in cui sono dati i segmenti a, b, c, o da quella nella quale si vuol ottenere x.

a) Per es. nella fig. 42 i due triangoli hanno l'angolo O comune e i lati opposti paralleli. Se in essa s'intende che OP, OM, OL rappresentino i segmenti a, b, c, sarà $OQ = x$. Se invece $OL = c$, $OP = a$, $LM = b$, sarà $PQ = x$.

b) Invece nella fig. 43 i lati opposti all'angolo comune O sono antiparalleli, cioè sono uguali gli angoli OML, OQP (epperò uguali anche OLM, OPQ).

c) Possono essere (fig. 44) c ed a le altezze dei due triangoli; supposto ancora essere b un lato OM od LM del primo, sarebbe OQ o $PQ = x$.

d) Oppure siano c ed a rappresentati da OL, OP o da OM, OQ; e sia b l'altezza del triangolo OLM; sarà x l'altezza dell'altro OPQ.

e) Se (fig. 45) le linee $OM = b$, $O'P = a$ sono ortogonalmente disposte, e se $c > b$, si può procedere nel modo seguente. Costruiscasi il triangolo OLM, il cui lato LM sia parallelo ad $O'P$, mentre l'ipotenusa OL sia $= c$. Condotta PQ parallela ad OL ed $O'Q$ perpendicolare a PQ, i triangoli rettangoli OLM, $O'PQ$ sono simili a cagione degli angoli uguali L, P. Dunque $O'Q = x$. — La retta $O'Q$, projezione ortogonale di $O'P$ sopra una retta perpendicolare ad OL, dicesi antiprojezione di $O'P$ sopra OL. Dunque, se a e b sono ortogonali, x è l'antiprojezione di a sopra c.

54. Dividere una retta a pel rapporto di due altre rette b, c, significa moltiplicare a pel rapporto $c : b$.

Dividere una retta a in n parti uguali equivale a moltiplicare a per $c : b$, dove c sia un segmento arbitrario e b sia uguale a c ripetuto n volte.

Se una retta b dev'essere divisa in parti proporzionali a dati segmenti a_1, a_2, a_3, ... a_n di una medesima retta, basterà moltiplicare questi segmenti pel rapporto $b : c$, dove sia $c = a_1 + a_2 + ... + a_n$ (N. 56).

55. Da un centro o polo O (fig. 46) si conducano raggi vettori che successivamente formino tra loro un angolo costante ω, e le cui lunghezze siano in progressione aritmetica

$$a, \; a+b, \; a+2b, \; a+3b, \; \ldots$$

I termini M, M_1, M_2, M_3, ..., saranno punti di una curva, detta spirale di ARCHIMEDE; di quella curva che sarebbe descritta da un punto M che si muovesse uniformemente sul raggio OM, mentre questo rotasse intorno ad O, del pari con velocità costante, in modo che M percorra lo spazio rettilineo b nello stesso tempo in cui il raggio OM descrive l'angolo ω.

Prendendo l'angolo ω assai piccolo, si otterranno punti abbastanza vicini per poter tracciare la curva con quell'approssimazione che si può desiderare in pratica.

Delineata la spirale d'ARCHIMEDE, per mezzo di essa si riduce il problema della divisione di un angolo a quello della divisione di una retta. Infatti, tirati due raggi vettori, i quali comprendano fra loro l'angolo che si vuol dividere in n parti proporzionali a rette date, basterà dividere in n parti proporzionali alle stesse grandezze la differenza de' raggi vettori; e le distanze da O agli $n-1$ punti di divisione saranno le lunghezze degli $n-1$ raggi vettori da inserirsi fra i due primi, per ottenere la divisione dell'angolo. La fig. 46 presenta la divisione dell'angolo MOM_5, in cinque parti uguali (*).

56. Se più segmenti AB, AC,.., BC,... di una retta u devono essere moltiplicati per un rapporto costante $b : c$, si tratterà di trovare una serie di punti A', B', C',... di un'altra retta u', in modo che sussistano le eguaglianze

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \ldots = \frac{B'C'}{BC} = \ldots = \frac{b}{c};$$

Le rette u, u' diconsi punteggiate simili; ed i punti A ed A', B e B',..., come pure i segmenti AB ed $A'B'$,... diconsi corrispondenti.

57. Se le u, u' sono parallele (fig. 47), le congiungenti AA', BB', CC'... concorreranno in un punto fisso O (centro di projezione). Se per es. si fa $AB = c$, $A'B' = b$, le AA', BB' incontrandosi dànno il punto O; e allora ogni raggio condotto per O segherà u, u' in due punti corrispondenti.

(*) PAPPO, *Collectiones mathematicae*.

58. Se le u, u' non sono parallele (fig. 48) e se il punto ad esse comune rappresenta due punti corrispondenti sovrapposti A, A', le rette BB', CC', ... saranno tutte fra loro parallele. Si troverà la direzione comune di queste parallele, assumendo per es. $AB = c$, $A'B' = b$; allora, ogni raggio parallelo a BB' segherà le u, u' in due punti corrispondenti.

59. Finalmente, se (fig. 49) le u, u' non sono parallele, e se il loro punto comune fa le veci di due punti P, Q' non corrispondenti, le rette AA', BB', CC', ... saranno tangenti di una stessa parabola. Se per es. si fa $PQ = c$, $P'Q' = b$, la parabola sarà determinata dal dover toccare u in Q ed u' in P'. Ogni tangente di questa parabola segherà u, u' in due punti corrispondenti.

Per ottenere coppie di punti corrispondenti, come A ed A', B e B', ... basta condurre dai vari punti A'', B'', ... della $P'Q$ le $A''A$, $B''B$, ... parallele ad u' e le $A''A'$, $B''B'$, ... parallele ad u. Infatti si ha manifestamente

$$\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{P'Q'}{P'Q}, \quad \frac{AB}{A''B''} = \frac{PQ}{P'Q},$$

epperò

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{b}{c}.$$

Se si vuol evitare di condurre rette parallele (*), basta (fig. 50) supporre date due tangenti della parabola ossia due rette u', u'', sulle quali siano segnate due punteggiate simili (o uguali) $A'B'C'D'E'\ldots$, $A''B''C''D''E''\ldots$, in modo che il punto comune alle due rette rappresenti due punti non corrispondenti E', B''; e che il segmento $B'E'$ di u' (compreso fra la parabola e la u'') sia uguale al denominatore c del rapporto dato. Allora, volendosi moltiplicare i segmenti di u' pel rapporto $b : c$, si allogherà la lunghezza $BE = b$ fra le u', u'', in guisa ch'essa congiunga due punti corrispondenti A', A''. Le rette $C'C''$, $D'D''$, ..., che uniscono punti corrispondenti di u', u'', determineranno sopra BE i segmenti cercati

$$BC : CD : DE : BE = B'C' : C'D' : D'E' : B'E'.$$

Per es., se si trattasse di dividere una data lunghezza BE in n parti uguali, si condurrebbe da B la retta u' e su di essa si prenderebbero $n+1$ segmenti uguali $A'B' = B'C' = C'D' = D'E'$; indi congiunti i punti E, E', sulla congiungente u'' si prenderebbero del pari gli $n+1$ segmenti EE' od $A''B'' = B''C'' = C''D'' = D''E''$. Le $n+1$ rette $C'C''$, $D'D''$, ... incontreranno BE ne' punti di divisione domandati C, D, ...

60. Problema. — Siano (fig. 51) a_1, a_2, ... a_n, n segmenti dati in grandezza, direzione e senso, i quali debbano essere ordinatamente moltiplicati pei rapporti $b_1 : c_1$, $b_2 : c_2$, . . , $b_n : c_n$.

Si costruisca un circuito poligonale P_a i cui lati siano ordinatamente

(*) Cousinery, *Le calcul par le trait* (Paris, 1840), p. 20. Per un altro metodo di risolvere questo problema veggasi Sacheri, *Sul tracciamento delle punteggiate projettive simili* (Atti dell'Accademia di Torino, novembre 1873).

equipollenti ai dati segmenti $a_1, a_2, \ldots$; denominiamo 1, 12, 23,... $n-1.n$, n i suoi vertici successivi, cominciando dall'origine del primo lato a_1, e terminando col secondo estremo dell'ultimo lato a_n.

Poi si costruiscano due altri circuiti P_c e P_{ac}; il primo de'quali sia formato dalle n rette 1, 2,..., n ordinatamente parallele ai lati di P_a e aventi da essi in una direzione costante (*) le distanze $c_1, c_2, \ldots c_n$; ed il secondo abbia i vertici 1, 2,..., n ordinatamente situati ne' lati di P_c, ed i lati 1, 12, 23,... $n-1.n$, n (**) passino rispettivamente pei vertici omonimi di P_a. L'insieme dei tre circuiti P_a, P_c, P_{ac} si dirà **prima figura**.

Ora si costruisca una **seconda figura**, composta in modo analogo da tre circuiti, P_x, P_b, P_{xb}, sotto le condizioni seguenti:

1° i lati di P_x siano ordinatamente paralleli ai lati di P_a; i lati di P_b a quelli di P_c (epperò a quelli di P_a e P_x); i lati di P_{xb} a quelli di P_{ac};

2° i lati 1, 2,..., n di P_b abbiano dai lati omonimi di P_x, nella direzione costante che sopra fu fissata ad arbitrio, le distanze $b_1, b_2, \ldots b_n$ (***);

3° i vertici 1, 2,.., n di P_{xb} cadano ordinatamente ne' lati omonimi di P_b; ed i lati 1, 12, 23,..., $n-1.n$, n di P_{xb} passino ordinatamente pei vertici omonimi di P_x.

Per costruire la seconda figura si potrà, a cagione d'esempio, procedere nel modo seguente. Si assuma ad arbitrio il vertice 1 di P_x e da esso si conducano due rette rispettivamente parallele al lato a_1 di P_a ed al lato 1 di P_{ac}: esse individueranno le posizioni del lato 1 di P_x e del lato 1 di P_{xb}. Se ora si conduce alla distanza b_1 dal lato 1 di P_x una retta parallela a questo lato, essa sarà il primo lato di P_b; ed il punto ov'esso incontra il lato 1 di P_{xb} sarà il vertice 1 di P_{xb}. Da questo punto si conduca (parallelamente al lato 12 di P_{ac}) il lato 12 di P_{xb}, e nell'intersezione col lato 1 di P_x si avrà il vertice 12 di P_x. Di qui si tirerà il lato 2 di questo stesso poligono P_x, nella direzione del segmento a_2; e condotto nella

(*) Che può essere fissata ad arbitrio, purchè non coincida con quella di alcun segmento a. Secondo che c_r sia positivo o negativo, si condurrà la retta r a destra o a sinistra di chi percorra a_r nel senso proprio di questo segmento.

(**) Il lato 1 è quello che precede il vertice 1; il lato 12 unisce i vertici 1, 2; ....; il lato n vien dopo il vertice n. Per costruire questo poligono si può prendere ad arbitrio il lato 1, purchè passi pel vertice 1 di P_a.

(***) Anche qui, secondo che b_r sia positivo o negativo, si condurrà il lato r a destra o a sinistra di chi percorra x_r nel senso proprio di questo segmento.

stessa direzione, alla distanza b_2, il lato 2 di P_b, il punto di concorso col lato 12 di P_{xb} sarà il vertice 2 di P_{xb}. E così di seguito.

Il poligono P_x, i cui lati chiameremo $x_1, x_2, \ldots x_n$, dà il chiesto risultato della moltiplicazione proposta. Infatti, il triangolo che ha per base x_r e il vertice opposto nel vertice r di P_{xb} è simile (a cagione del parallelismo dei lati) al triangolo della prima figura, la cui base è a_r e il cui vertice opposto è il vertice r di P_{ac}. Le dimensioni di questi triangoli nella direzione costante sono b_r, c_r, dunque

$$x_r : a_r = b_r : c_r \ ,$$

donde

$$x_r = a_r \frac{b_r}{c_r} \ .$$

61. Quanto al senso del segmento x_r, osserviamo che, se c_r, b_r sono dello stesso senso, i due triangoli sono similmente posti, cioè i vertici r giacciono entrambi a destra o entrambi a sinistra della base opposta rispettiva (a_r od x_r); invece, se c_r, b_r sono di senso opposto, i due triangoli hanno giacitura inversa. Perciò i segmenti a_r, x_r hanno nel primo caso lo stesso senso; nel secondo hanno sensi opposti.

Di qui consegue che i segmenti x sono disposti consecutivamente, con riguardo al senso, cioè nel modo che è richiesto dalla composizione geometrica. Dunque la loro risultante, ossia la risultante dei segmenti $a_r \frac{b_r}{c_r}$, sarà in grandezza, direzione e senso, la retta che chiude il contorno poligonale P_x (la retta che dall'origine di x_1 va al termine di x_n) .

62. Casi particolari. — I segmenti a siano tutti paralleli (fig. 52); allora ciascuno de' circuiti P_a, P_x si riduce ad una retta punteggiata; e ciascuno de' circuiti P_c, P_b diviene un fascio di raggi paralleli. Vale a dire, la costruzione si riduce a quel che segue:

Si portino i segmenti $01 = a_1$, $12 = a_2$, $23 = a_3, \ldots$ consecutivamente in una retta a; parallelamente ad essa ed alle distanze $c_1, c_2, \ldots c_n$ (misurate in una direzione costante, arbitraria purchè diversa da quella di a) si conducano altrettante rette $1, 2, \ldots, n$, che considereremo come raggi di un fascio, il cui centro è a distanza infinita; e si tracci un circuito poligonale i cui vertici $1, 2, \ldots, n$ cadano ne' raggi paralleli omonimi, ed i cui lati $01, 12, 23, \ldots, n-1 \,.\, n$, n passino pei punti corrispondenti $0, 1, 2, \ldots$

$n-1$, n della punteggiata a (cioè pei punti che limitano i segmenti a_1, a_2, . . ., a_n).

Poi si costruisca la seconda figura, tracciando un fascio di raggi 1, 2, . . . , n paralleli ad a ed aventi da una retta x (pure parallela ad a) ordinatamente le distanze b_1, b_2, . . . , b_n; e delineando un circuito i cui lati siano ordinatamente paralleli ai lati del primo poligono, ed i cui vertici cadano sui raggi del secondo fascio. I segmenti 01, 12, 23, ... di x compresi fra i lati successivi di questo nuovo poligono saranno rispettivamente uguali ad

$$x_1 = a_1 \frac{b_1}{c_1}, \quad x_2 = a_2 \frac{b_2}{c_2}, \quad x_3 = a_3 \frac{b_3}{c_3}, \ldots .$$

ed il segmento compreso fra il lato $r-1 \, . \, r$ ed il lato $s \, . \, s+1$ sarà:

$$\sum_{i=r}^{i=s} x_i = \sum_{i=r}^{i=s} a_i \frac{b_i}{c_i} \quad \ldots \text{ (*)} .$$

Nel caso qui considerato, dall'osservazione fatta riguardo al senso del segmento x_r, si deduce tosto che due segmenti x_r, x_s avranno lo stesso senso o sensi opposti, secondo che fra le tre coppie $a_r\ a_s$, $b_r\ b_s$, $c_r\ c_s$, ve ne sia un numero pari (zero o due) o un numero dispari (una o tre) che sian formate da segmenti di senso opposto. Ciò si accorda colla regola de' segni nella moltiplicazione algebrica.

63. Se, oltre ad essere le a tutte parallele, fossero le c tutte uguali fra loro, il primo fascio si ridurrebbe ad una retta unica, epperò tutti i vertici del primo circuito verrebbero a coincidere in un solo punto di cotesta retta; vale a dire, il primo poligono degenererebbe in un fascio di raggi uscenti da un punto O, situato alla distanza c dalla retta a.

In questo caso il problema può enunciarsi così:

Ridurre i prodotti dati

$$a_1 b_1, \quad a_2 b_2, \ldots, \quad a_n b_n$$

alla base costante c, determinando i segmenti ad essi proporzionali

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n .$$

E la soluzione sarebbe adunque (fig. 53) la seguente: formisi la retta punteggiata a, i cui segmenti consecutivi siano $01 = a_1$, $12 = a_2$, . . . ,

(*) JAEGER, *Das graphische Rechnen* (Speyer, 1867), p. 15.

$n-1\,.\,n=a_n$; e projettinsi i punti 0, 1, 2,... $n-1$, n della punteggiata medesima mediante raggi uscenti da un punto O preso alla distanza c dalla retta a; dove la distanza può essere normale od obliqua ad arbitrio. Poi costruiscasi un fascio di raggi 1, 2,..., n paralleli ad a e aventi, nella direzione di c, le distanze b_1, b_2,.., b_n da una retta x parallela anch'essa ad a. Finalmente si delinei un poligono i cui vertici cadano ordinatamente sui raggi paralleli 1, 2,... n anzidetti, e i cui lati 01, 12, 23,..., $n-1.n$, n siano ordinatamente paralleli ai raggi $O0$, $O1$, $O2$,... $On-1$, On del fascio O. I segmenti 01, 12, 23,... che i lati di questo poligono determinano sulla retta x saranno i segmenti x_1, x_2, x_3,...... domandati (*).

64. Se, invece delle c, fossero le b tutte uguali fra loro, oltre ad essere parallele le a, il problema si potrebbe enunciare così:

Dati i rapporti

$$\frac{a_1}{c_1},\ \frac{a_2}{c_2},\ldots,\ \frac{a_n}{c_n}$$

determinare i segmenti

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$$

ad essi proporzionali: essendo b il segmento costante che risulta dalla moltiplicazione di x pel corrispondente rapporto $\frac{c}{a}$.

Costruita la punteggiata a (fig. 54) coi segmenti $01=a_1$, $12=a_2$, ..., $n-1.\,n=a_n$, ed il fascio di raggi 1, 2, ..., n paralleli alla retta a ed aventi da essa (in direzione costante) rispettivamente le distanze c_1, c_2, ..., c_n, si delinei un circuito poligonale i cui vertici 1, 2,..., n cadano ordinatamente su questi raggi e i cui lati 1, 12, 23,..., $n-1.\,n$, n passino pei punti omonimi della punteggiata a. Poi si costruisca un secondo fascio di raggi, i quali siano ordinatamente paralleli ai lati del contorno poligonale ed escano da un punto O, fissato ad arbitrio: da ultimo si seghi il secondo fascio con una retta x parallela ad a ed avente da O la distanza b, nella direzione delle c. I segmenti 01, 12, 23,..., così ottenuti sulla x saranno i domandati.

A questo problema si riduce in sostanza la trasformazione di più frazioni date

$$\frac{a_1}{c_1},\ \frac{a_2}{c_2},\ldots,\ \frac{a_n}{c_n}$$

(*) CULMANN, *l. c.*, p. 22 e 23.

in altre equivalenti

$$\frac{x_1}{b}, \frac{x_2}{b}, \ldots, \frac{x_2}{b}$$

aventi uno stesso denominatore dato b.

65. Problema. — Moltiplicare una retta a pei rapporti

$$\frac{b_1}{c_1}, \quad \frac{b_2}{c_2}, \quad \ldots, \quad \frac{b_n}{c_n},$$

Si traccino (fig. 55) due rette od assi bb, cc, che si seghino in O sotto un angolo qualunque. A partire dall'origine O si portino sul primo asse i segmenti b e sul secondo i segmenti c, onde risultino:

nel primo asse: $O1 = b_1$, $O2 = b_2$, ... $On = b_n$,
e nel secondo: $O1 = c_1$, $O2 = c_2$, ... $On = c_n$.

Congiungansi i punti omonimi de' due assi, cioè 1 con 1, 2 con 2, ecc. e, parallelamente alle congiungenti, tirinsi per O altrettante rette l_1, l_2 ...., l_n, indicate nella figura coi soli indici numerici.

Due segmenti b_r, c_r, affetti dallo stesso indice, insieme colla congiungente rr de' loro termini, comprendono un triangolo. A ciascuno di tali triangoli se ne costruisca uno simile, nel quale i due lati corrispondenti a c_r, rr si spicchino da O e giacciano rispettivamente in cc, l_r; il terzo lato, corrispondente a b_r e parallelo a bb, dicasi a_r. Per compiere la determinazione di questi nuovi triangoli, basterà fissarne un lato, quello che giace in cc; sia esso uguale ad a nel primo triangolo, uguale ad a_1 nel secondo, ad a_2 nel terzo..., ad a_{n-1} nell'ultimo. Dico che a_n, cioè quel lato dell'ultimo triangolo che è parallelo a bb, sarà il risultato della moltiplicazione che si doveva fare.

Infatti, confrontando l'r-esimo triangolo della seconda serie, i cui lati paralleli a cc, bb sono a_{r-1}, a_r, col triangolo simile della prima serie, i cui lati corrispondenti sono c_r, b_r, si ha

$$\frac{a_r}{a_{r-1}} = \frac{b_r}{c_r},$$

ossia

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{c_1}, \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{c_2}, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{b_3}{c_3}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{b_n}{c_n}.$$

Moltiplicando fra loro queste uguaglianze si ha:

$$a_n = a \cdot \frac{b_1}{c_1} \cdot \frac{b_2}{c_2} \cdot \frac{b_3}{c_3} \cdot \ldots \ldots \frac{b_n}{c_n} \text{ , c.d.d .}$$

66. Dimostriamo ora che il risultato non è alterato se si scambiano tra loro due fattori, per es. $\frac{b_1}{c_1}$ e $\frac{b_2}{c_2}$. Se si prendono questi fattori nell'ordine $\frac{b_1}{c_1}$, $\frac{b_2}{c_2}$, le costruzioni saranno le seguenti (fig. 56): su cc prendasi $OA = a$; da A tirisi la parallela a bb sino a raggiungere l_1 in A_1; il segmento $AA_1 = a_1$ si porti su cc, cioè si faccia $OA_1 = a_1$, e da questo nuovo punto A_1 si guidi la parallela a bb sino ad incontrare l_2 in A_2; il segmento A_1A_2 così ottenuto sarà a_2.

Invece, se i fattori si prendono nell'ordine $\frac{b_2}{c_2}$, $\frac{b_1}{c_1}$, si procederà come segue: dopo aver preso $OA = a$, come dianzi, e condotta per A la parallela a bb, si termini questa sulla l_2 in A_2 e dicasi a' il segmento così ottenuto; poi facciasi in cc la $OA_2 = a'$, e si innalzi A_2A_1 parallela a bb e terminata su l_1. Questa A_2A_1 dicasi a''.

I triangoli simili OA_1A_2, OA_1A, compresi fra l_1 e cc, dànno

$$\frac{A_2A_1}{AA_1} = \frac{OA_2}{OA} \text{ , cioè } \frac{a''}{a_1} = \frac{a'}{a} \text{ ;}$$

ed i triangoli simili OA_1A_2, OAA_2, compresi fra l_2 e cc, dànno analogamente

$$\frac{A_1A_2}{OA_1} = \frac{AA_2}{OA} \text{, cioè } \frac{a_2}{a_1} = \frac{a'}{a} \text{ .}$$

Dunque $a'' = a_2$, c.d.d. (*).

67. Nel costruire i triangoli della prima serie, invece di portare i segmenti b sulla retta bb, si potrebbe (fig. 57), dopo aver preso nella cc il lato $O1 = c_1$, assumere un tal punto 1 su Ob che la congiungente 11 sia uguale (in grandezza assoluta) a b_1. Poi, condotta per O la l_1 parallela ad 11, si costruirebbe, come dianzi, il triangolo della seconda serie, simile ad $O11$, assumendo nella cc un

(*) Eggers, *Grundzüge einer graphischen Arithmetik* (Schaffhausen, 1865), p. 12. — Jaeger, *l. c.*, p. 11.

lato uguale ad a. Allora il prodotto $a_1 = a\frac{b_1}{c_1}$ sarebbe dato, non già dal lato parallelo alla bb, ma dal lato sopra l_1. E così di seguito per gli altri triangoli. In questa costruzione non è tenuto conto de' segni de' segmenti b, giacchè essi vengono portati in direzioni differenti; perciò nel riportare per es. il segmento a_1 sulla cc per procedere alla costruzione del triangolo successivo, bisognerà dargli il segno di a o l'opposto, secondo che b_1 e c_1 hanno segni uguali od opposti.

In questo modo di procedere, i segmenti $a_1, a_2, \ldots, a_n$, che sono ottenuti rispettivamente sulle $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (parallele alle $b_1, b_2, \ldots, b_n$) vengono riportati sulla cc mediante archi circolari il cui centro comune è O.

68. Un terzo modo di eseguire la proposta moltiplicazione consiste (fig. 58) nel portare (coll'origine comune O) i segmenti b_1, $b_3, b_5, \ldots, c_2, c_4, \ldots$ sopra uno dei due assi (bb) ed i segmenti $b_2, b_4, \ldots, c_1, c_3, c_5, \ldots$ sull'altro asse (cc), congiungendo sempre fra loro i termini 11, 22, 33,... de' segmenti b e c d'indice uguale. Poi basterà inserire fra i due assi una spezzata, i cui lati successivi siano rispettivamente paralleli alle congiungenti 11, 22, 33,..., e i cui vertici siano alternativamente sulle rette cc, bb. Se il primo vertice è stato preso in modo che sia il termine del segmento della cc uguale ad a ed avente l'origine in O, il secondo vertice, il terzo, il quarto,... saranno analogamente i termini de' segmenti

$$a_1 = a\frac{b_1}{c_1},\quad a_2 = a_1\frac{b_2}{c_2},\quad a_3 = a_2\frac{b_3}{c_3}, \ldots,$$

coll'origine comune O (*).

Ciò si rende evidente considerando che i triangoli della seconda serie, in questa costruzione, hanno tutti un lato diretto secondo bb ed un altro secondo cc; mentre il terzo è quel lato della spezzata che è parallelo al terzo lato del triangolo simile della prima serie.

69. Quando non occorra di tener conto de' segni de' segmenti a, b, c, cioè quando questi siano considerati come tutti positivi, si può anche disporre la costruzione in modo che così i triangoli della prima

(*) Nelle fig. 58, 59 e seg., ciascuno dei segmenti che hanno l'origine comune O, porta al termine la lettera a o b o c, che ne indica la misura.

serie, come i triangoli della seconda riescano disposti consecutivamente (quasi a ventaglio) intorno ad un vertice comune O (fig. 59).

Per O tirinsi $n+1$ rette o raggi vettori, comprendenti fra loro angoli arbitrari; fra il primo e il secondo raggio vettore si costruiscano il primo triangolo della prima serie e il primo della seconda; fra il secondo e il terzo raggio vettore i secondi triangoli delle due serie; fra il terzo ed il quarto raggio vettore i terzi triangoli; ecc.: in modo che due triangoli successivi della seconda serie abbiano sempre un lato comune. Vale a dire: sul primo raggio si prendano coll'origine O due segmenti rispettivamente uguali ad a e c_1; sul secondo raggio si prenda colla stessa origine il segmento b_1: si congiungano i termini di b_1, c_1 ed alla congiungente si conduca la parallela dal termine di a, così che si determinerà sul secondo raggio un segmento $a_1 = a\frac{b_1}{c_1}$. Prendendo ora nello stesso modo il segmento c_2 sul secondo raggio, ed il segmento b_2 sul terzo, si determinerà su quest'ultimo un segmento $a_2 = a_1\frac{b_2}{c_2} = a\frac{b_1}{c_1}\cdot\frac{b_2}{c_2}$. E continuando questa costruzione si giungerà da ultimo ad ottenere sull' $(n+1)$-esimo raggio un segmento avente l'origine in O e il cui valore sarà

$$a_n = a\frac{b_1}{c_1}\cdot\frac{b_2}{c_2}\cdots\frac{b_n}{c_n}.$$

IV.

Potenze.

70. Se nell'ultimo problema si suppongono tutte eguali le b, e così pure tutte eguali le c, il segmento costruito a_n sarà il risultato della moltiplicazione di a per la potenza n-esima del rapporto $\frac{b}{c}$.

In questo caso, e supposta (N. 65) la prima (fig. 60), ovvero (N. 67) la seconda costruzione (fig. 61), i triangoli della prima serie coincidono tutti in uno solo, due lati del quale sono i segmenti dati b, c. Gli n triangoli della seconda serie sono tutti simili fra di loro e simili all'unico della prima serie; i loro lati giacenti in Oc

sono ordinatamente a, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, ed i lati paralleli a b sono a_1, a_2, a_3, ... a_n, dove

$$a_1 = a\frac{b}{c}, \quad a_2 = a\left(\frac{b}{c}\right)^2, \quad a_3 = a\left(\frac{b}{c}\right)^3, \quad \ldots, \quad a_n = a\left(\frac{b}{c}\right)^n.$$

Questa serie di triangoli simili può anche essere prolungata nel verso contrario, in modo da dare i prodotti di a per le potenze negative di $\frac{b}{c}$. Infatti, costruendo il triangolo il cui lato parallelo a b sia uguale ad a, il lato sopra Oc sarebbe

$$a_{-1} = a : \frac{b}{c} = a\left(\frac{b}{c}\right)^{-1};$$

costruendo poi il triangolo il cui lato parallelo a b sia uguale ad a_{-1}, il lato sopra Oc sarebbe

$$a_{-2} = a\left(\frac{b}{c}\right)^{-2},$$

e così di seguito (*).

71. Secondo la terza maniera (N. 68), i triangoli della prima serie si riducono a due, uguali fra loro ma diversamente situati (fig. 62); l'uno ha il lato c nel primo asse e il lato b nel secondo; l'altro invece ha il lato b nel primo e il lato c nel secondo. Per conseguenza le direzioni dei terzi lati sono antiparallele, e secondo esse si dirigeranno i lati della spezzata inscritta fra i due assi. I vertici di questa spezzata determinano sul primo asse de' segmenti, che contati da O hanno per valori

$$a, \quad a_2 = a\left(\frac{b}{c}\right)^2, \quad a_4 = a\left(\frac{b}{c}\right)^4, \quad \ldots\ldots$$

e sull'altro asse

$$a_1 = a\frac{b}{c}, \quad a_3 = a\left(\frac{b}{c}\right)^3, \quad a_5 = a\left(\frac{b}{c}\right)^5, \quad \ldots\ldots (**).$$

Anche i lati della spezzata formano una progressione geometrica; detto a' il primo lato, il secondo è $a'\frac{b}{c}$, il terzo $a'\left(\frac{b}{c}\right)^2$, il quarto

(*) Eggers, *l. c.*, p. 15. — Jaeger, *l. c.*, p. 18-20.
(**) Cousinery, *l. c.*, p. 24-25.

$a'\left(\frac{b}{c}\right)^3, \ldots$ Di qui si conchiude che il segmento dato, il quale dee moltiplicarsi per $\left(\frac{b}{c}\right)^n$, invece d'essere portato sul primo asse, può inserirsi nell'angolo degli assi, in modo da formare il primo lato della spezzata; l'$(n+1)$-esimo lato sarà allora il risultato della moltiplicazione.

Continuando la spezzata in senso inverso, si ottengono i prodotti del segmento dato (a od a') per le potenze negative

$$\left(\frac{b}{c}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{b}{c}\right)^{-2}, \quad \left(\frac{b}{c}\right)^{-3}, \quad \ldots\ldots$$

del rapporto dato.

Se fra due lati successivi della spezzata, per es. fra i primi due, che sono a' ed $a'\frac{b}{c}$, si vuol continuare la progressione, basterà inserirvi una nuova spezzata i cui lati siano alternativamente paralleli agli assi; e si otterrà così una figura analoga alla precedente.

Detto a'' il segmento del primo asse compreso fra i primi due lati della prima spezzata, i lati della nuova spezzata saranno

$$a'', \quad a''\frac{b}{c}, \quad a''\left(\frac{b}{c}\right)^2, \quad a''\left(\frac{b}{c}\right)^3, \ldots \quad (*).$$

72. Da ultimo, adottando la quarta maniera (N° 69) e di più assumendo costante l'angolo fra due raggi vettori consecutivi (fig. 63), tutt'i triangoli della prima serie riusciranno uguali, ed i loro vertici saranno collocati su due cerchi concentrici, l'uno di raggio b, l'altro di raggio c. I triangoli della seconda serie sono tutti simili fra loro, giacchè ciascun d'essi è simile a quello che gli corrisponde nella prima serie; i loro vertici (diversi da O) e i loro lati (opposti ad O) sono i vertici ed i lati d'un circuito poligonale a forma di spirale. I raggi vettori di questa spirale, cioè le rette condotte da O ai vertici, sono i termini

$$a, \quad a_1 = a\frac{b}{c}, \quad a_2 = a\left(\frac{b}{c}\right)^2, \quad \ldots\ldots$$

di una progressione geometrica, e possono essere continuati anche

(*) COUSINERY, *l. c.*, p. 24. — CULMANN, *l. c.*, p. 13.

nel verso contrario, in modo da dare i prodotti di a per le potenze negative del rapporto $\frac{b}{c}$:

$$a\left(\frac{b}{c}\right)^{-1},\quad a\left(\frac{b}{c}\right)^{-2},\quad a\left(\frac{b}{c}\right)^{-3},\quad \ldots\ldots$$

Anche i lati del circuito poligonale formano una progressione geometrica, avente la medesima ragione $\frac{b}{c}$ (*).

Se l'angolo costante di due raggi vettori consecutivi avesse con quattro retti un rapporto commensurabile, che ridotto ai minimi termini avesse per denominatore p, il $(p+1)$-esimo raggio coinciderebbe col primo, il $(p+2)$-esimo col secondo, ecc. Per es. se il detto angolo costante fosse un retto (**), anche gli angoli compresi da ogni coppia di due lati successivi del poligono spirale sarebbero tutti retti (fig. 64).

V.

Estrazione di radice.

73. Si consideri (fig. 65) il poligono spirale $ABCDEFG\ldots\ldots$ i cui raggi vettori OA, OB, OC, OD,... rappresentano i prodotti di un segmento costante OA per le potenze 0, 1, 2, 3,... di un dato rapporto $\frac{b}{c} = \frac{OB}{OA}$, ed i cui lati AB, BC, CD,... sottendono al polo O un angolo costante (N. 72). Come già si è osservato, sono simili fra loro tutti i triangoli (elementari) aventi il vertice O e per base un lato del poligono; e simili fra loro sono anche le figure che si ottengono riunendo due o tre o quattro ... triangoli siffatti, perchè esse sono composte dello stesso numero di triangoli simili e similmente disposti. Sono dunque uguali tutti gli angoli ABO, BCO, CDO,...; uguali gli angoli ACO, BDO, CEO, ...; uguali gli angoli ADO, BEO, CFO, ... ecc: in generale sono simili tutti i triangoli di vertice O le cui basi sono corde che sottendono uno stesso numero di lati del poligono: le quali corde sottendono ancora uguali angoli al polo O.

Tali proprietà sono affatto indipendenti dalla grandezza dell'angolo AOB, assunto ad arbitrio nella costruzione del primo triangolo elementare. Perciò esse non cesseranno di sussistere, se quest'angolo si supponga infinitamente piccolo: nel qual caso il circuito poligonale diviene una linea curva. Dalla

(*) JAEGER, *l. c.*, p. 20.

(**) REULEAUX, *Der Constructeur*, terza ediz. (Braunschweig, 1869), p. 84. — K. VON OTT, *Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik* (Prag, 1871), p. 10.

somiglianza di tutt' i triangoli elementari s'è già dedotta l'uguaglianza degli angoli alle basi OAB, OBC, ...; ma, se l'angolo in O diviene infinitesimo, il lato opposto del triangolo elementare riesce tangente alla curva; la curva ottenuta ha dunque la proprietà che le sue tangenti (prolungate in uno stesso senso, per es. in quello dei raggi vettori crescenti) incontrano sotto angoli uguali i raggi vettori condotti dal polo O ai punti di contatto (*).

A cagione di tale proprietà, la curva si chiama spirale equiangola (**).

74. Siccome le figure costituite da un egual numero di triangoli elementari successivi sono simili fra loro, così, se nella spirale equiangola si conducono, ad uguali intervalli angolari, i raggi vettori OA, OB, OC, ..., i triangoli OAB, OBC, OCD, ... saranno simili fra loro; per conseguenza i detti raggi vettori formeranno una progressione geometrica, vale a dire, il circuito poligonale $ABCD$... inscritto nella spirale sarà appunto quello che si costruirebbe secondo la regola del N. 72 partendo dal triangolo elementare AOB. Perciò, se, assunto ad arbitrio il triangolo AOB, si costruisce il circuito poligonale $ABCD$..., tutt'i vertici del medesimo saranno punti di una stessa spirale equiangola, avente il polo in O.

Di qui segue che il polo e due punti della curva determinano la spirale equiangola.

75. Due punti qualsivogliano B, C della spirale equiangola (fig. 66), il polo O, l'intersezione T delle tangenti in quei punti e l'intersezione N delle relative normali sono cinque punti di uno stesso cerchio, pel quale NT è un diametro. Di ciò è facile persuadersi, osservando: 1° che, essendo retti gli angoli NBT, NCT, il cerchio di diametro NT passa pei punti B, C; 2° che, essendo supplementari gli angoli OBT, OCT (perchè è costante l'angolo che la tangente fa col raggio vettore del punto di contatto), i quattro punti $OTBC$ appartengono ad una stessa circonferenza. Di qui consegue che l'angolo NOT è retto.

76. Supponğansi ora i punti B, C abbastanza vicini fra loro, onde l'arco di spirale fra essi compreso possa essere surrogato da un arco di cerchio. Questo arco, dovendo essere tangente alle BT, CT ne' punti B, C, avrà il centro in N; le tangenti BT, CT saranno uguali, epperò la corda BC sarà divisa per metà ed ortogonalmente dalla NT; donde segue inoltre che N, T sono i punti di bissezione degli archi BC del cerchio OBC; cioè ON ed OT saranno le bissettrici interna ed esterna dell'angolo BOC. Dunque il punto N, che deve servire di centro per descrivere l'arco BC da sostituirsi all'arco di spirale, si può costruire come estremo di quel diametro del cerchio OBC, che è perpendicolare alla corda BC. Il centro P del successivo arco CD, dovendo essere il punto comune alle normali in C, D, si otterrà come intersezione della CN colla retta che taglia ad angolo retto e per metà la corda CD, ovvero colla bissettrice esterna dell'angolo COD. E così di seguito.

77. Di qui si cava la costruzione della spirale equiangola per mezzo di archi circolari. Dividasi (fig. 67) lo spazio angolare (quattro retti) intorno al polo O in un certo numero di parti uguali, abbastanza grande affinchè l'arco di

---

(*) Cousinery, *l. c.*, p. 41, 42. — Culmann, *l. c.*, p. 14 e seg.

(**) Witworth, *The equiangular-spiral, its chief properties proved geometrically* (Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics, vol. 1, p. 5, Cambridge, 1862).

spirale corrispondente a ciascuna parte possa essere surrogato da un arco circolare. Sopra due raggi dividenti (vettori) successivi si prendano i punti A, B, pei quali debba passare la spirale. Il centro M dell'arco AB sarà l'estremo di quel diametro del cerchio OAB che è perpendicolare alla corda AB. Sia N il punto ove BM sega la bissettrice esterna dell'angolo compreso da OB col raggio vettore successivo; col centro N si descriverà l'arco BC. Analogamente sia P il punto ove CN sega la bissettrice esterna dell'angolo compreso da OC col raggio vettore successivo; col centro P si descriverà l'arco CD. E così di seguito (*).

78. Invece di assumere ad arbitrio il punto A (oltre ad O e B), si può supporre dato l'angolo costante che la tangente fa col raggio vettore. In tal caso, condotta la BS che faccia con OB l'angolo dato, sia S il punto d'intersezione della tangente BS colla bissettrice interna dell'angolo che OB fa col raggio vettore precedente; e il punto A sarà dato dall'incontro di questo raggio col cerchio OBS. Indi trovato quel punto M di questo cerchio che è diametralmente opposto ad S, si procederà innanzi secondo il metodo or ora esplicato (*).

79. Spesse volte però si potrà prescindere dalla descrizione di tali archi di cerchio; e limitarsi ad ottenere una serie di punti della curva abbastanza vicini per poter essere uniti fra loro con una linea continua. A quest' uopo, assunto il triangolo elementare OA_1B_1 (fig. 68), il cui angolo in O sia assai piccolo, si costruirà fra i lati OA_1, OB_1 la spezzata $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1\ldots$ i cui lati siano alternativamente paralleli ed antiparalleli ad A_1B_1. Indi, sui raggi OA, OB, OC, OD, OE, OF,... che fra loro comprendono angoli successivi costantemente uguali ad A_1OB_1, si prenderanno i punti A, B, C, D, E,... in modo che sia $OA_1 = OA$, $OB_1 = OB$, $OC_1 = OC$, $OD_1 = OD$, $OE_1 = OE\ldots$

80. Questa spirale, quando sia descritta, serve a risolvere il problema dell'estrazione di radice.

Si domandi la radice i-esima del rapporto fra due dati segmenti a, a_i. Posto $a_i = a\left(\frac{b}{c}\right)^i$, si tratterà di determinare il rapporto $\frac{b}{c}$. Conducansi alla spirale (fig. 69ª, dove $i = 5$) i raggi vettori a, a_i e l'angolo da essi compreso dividasi in i parti uguali. Gli $i-1$ raggi vettori dividenti a_1, a_2, ... a_{i-1} saranno i termini intermedi di una progressione geometrica di $i+1$ termini, il primo de' quali è a e l'ultimo è a_i. Il rapporto $a_1 : a$ de' primi due termini sarà adunque uguale al rapporto cercato.

81. Due raggi vettori comprendenti un angolo costante hanno un rapporto costante. Segue da ciò che, se si fa la somma o la differenza degli angoli compresi da due coppie di raggi vettori a_1 e b_1, a_2 e b_2, l'angolo risultante sarà compreso da due raggi vettori il cui rapporto sarà uguale nel primo caso al prodotto, e nel secondo al quoziente de' rapporti $a_1 : b_1$, $a_2 : b_2$. Vale a dire, la spirale equiangola fa nel calcolo grafico lo stesso ufficio che una tavola di logaritmi nel calcolo numerico: i rapporti dei raggi vettori corrispondono ai numeri, e gli angoli ai logaritmi. Per tale proprietà, la curva di cui si parla chiamasi anche spirale logaritmica. S'intende da sè che, assumendo per denominatore costante di cotesti rapporti il raggio vettore uguale all'unità lineare, si verrebbe a sostituire la considerazione de' raggi vettori a quella dei loro rapporti coll'unità.

(*) Costruzioni dovute al signor ingegnere A. Sayno.

Per es. se si volesse costruire il segmento x dato dall'equazione

$$x = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

x sarebbe quel raggio vettore della spirale che col raggio 1 fa un angolo uguale alla media aritmetica degli angoli che i raggi $a_1, a_2 \ldots a_n$ fanno col medesimo raggio 1.

82. Ma quando non si tratti che dell'estrazione della radice quadrata, piuttosto che ricorrere alla spirale, sarà più semplice servirsi delle note costruzioni della geometria elementare. Cioè, se si domanda $x = \sqrt{ab}$, il segmento x si costruirà come media geometrica fra i segmenti a, b.

Se i segmenti $OA = a$, $OB = b$ sono disposti per diritto e nello stesso senso, x sarà la lunghezza della tangente OX tirata da O ad un cerchio descritto per A e B (fig. 70); ovvero (fig. 70 *bis*), descritto il semicerchio che ha per diametro il segmento maggiore OA, x sarà la corda OX la cui projezione sul diametro è l'altro segmento b.

Se i segmenti $OA = a$, $OB = b$ sono disposti per diritto, ma in senso contrario (fig. 71), descritto il semicerchio sul diametro AB, sarà x l'ordinata elevata dal punto O.

83. Gli stessi scopi ai quali serve la spirale equiangola possono essere ottenuti facilmente con un'altra curva, detta l o g a r i t m i c a.

Si traccino due assi Ox, Oy (fig. 72); sul primo di essi si prendano, a partire dall'origine O, i segmenti

$$O0, O1, O2, O3, \ldots.$$

rispettivamente uguali ai termini

$$x_0, \; x_1 = x_0 \frac{m}{n}, \; x_2 = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^2, \; x_3 = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^3, \ldots.$$

di una progressione geometrica, avente il primo termine x_0 e la ragione $\frac{m}{n}$ (dove si suppone $m > n$); e sul secondo asse si prendano, ancora a partire da O, i segmenti

$$O0, O1, O2, O3, \ldots.$$

rispettivamente uguali ai termini

$$y_0 = 0, \; y_1 = l, \; y_2 = 2l, \; y_3 = 3l, \ldots.$$

di una progressione aritmetica, avente il primo termine 0 e la differenza l (*). I termini delle due progressioni, che corrispondono all'indice r, sono

$$x_r = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^r, \quad y_r = rl,$$

onde si ha

$$x_r = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y_r}{l}}.$$

(*) Nella serie de' numeri su Oy, lo zero coincide coll'origine O degli assi, perchè si è preso $y_0 = 0$.

In ogni coppia di termini consecutivi dell'una e dell'altra progressione si può interpolare un nuovo termine, per modo da ottenere due nuove progressioni, nella prima delle quali la ragione sia $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ ossia $\frac{\sqrt{mn}}{n}$, e la differenza della seconda sia $\frac{l}{2}$. Ciò si fa osservando che in una progressione geometrica (aritmetica) un termine qualunque è medio geometrico (aritmetico) fra il termine che lo precede e quello che lo sussegue. Per es. costruendo la media geometrica di x_r, x_{r+1} e la media aritmetica di y_r, y_{r+1}, avremo i due termini corrispondenti

$$\left(x_r\, x_{r+1}\right)^{\frac{1}{2}} = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^{r+\frac{1}{2}}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(y_r + y_{r+1}\right) = \left(r + \tfrac{1}{2}\right) l$$

delle due nuove progressioni. In queste si potrà analogamente interpolare un termine fra ogni pajo di termini consecutivi; e così di seguito, finchè si giunga a due progressioni per le quali la ragione $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2^i}}$ e la differenza $\frac{l}{2^i}$ siano piccole quanto si voglia (*). Indicando con x, y due termini corrispondenti, avremo sempre

$$x = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y}{l}}, \tag{1}$$

ovvero

$$y = l\,\frac{\log \frac{x}{x_0}}{\log \frac{m}{n}}, \tag{2}$$

i logaritmi essendo presi in un sistema qualunque. Diciamo corrispondenti i punti degli assi Ox, Oy che sono termini de' corrispondenti segmenti x, y; e da essi punti corrispondenti si conducano le parallele agli assi, cioè dal termine di x la parallela ad Oy, e dal termine di y la parallela ad Ox. Le due rette così tracciate si segheranno in un punto M; le x, y diconsi coordinate del punto M, e propriamente ascissa e ordinata. L'equazione (1) o (2) esprimente la relazione fra le coordinate del punto M dicesi equazione di quella curva che è il luogo di tutt'i punti analoghi ad M; la qual curva si denomina logaritmica, appunto perchè l'ordinata è proporzionale al logaritmo di un numero proporzionale all'ascissa.

84. Questa curva si costruirà adunque per punti nel modo seguente (fig. 73). Tracciati i due assi Ox, Oy (per es. ad angolo retto), si prenda su Oy un segmento $OB = O(2^i) = l$, dove l può considerarsi come l'unità della scala delle lunghezze su Oy; e su Ox prendasi un segmento $OA = O\,(2^i) = x_0 \frac{m}{n}$,

---

(*) i è il numero delle interpolazioni eseguite.

dove $Oo = x_0$ può essere l'unità della scala delle lunghezze per Ox (*), e il rapporto $\frac{m}{n}$ la base del sistema logaritmico (il numero 10).

Dividasi OB in 2^i parti uguali, e siano 1, 2, 3, ... 2^{i-1}, ... 2^i ($\equiv B$) i punti di divisione. Per trovare i punti corrispondenti di Ox, si prenda la media geometrica fra x_0 ed $x_0 \frac{m}{n}$; cioè si descriva un semicerchio sul diametro OA, e si porti su OA, a partire da O, la lunghezza della corda che ha per projezione Oo; avremo così il punto 2^{i-1} di Ox, corrispondente al punto omonimo di Oy (cioè al punto di mezzo di OB). Analogamente, si prenda la media geometrica fra Oo ed $O2^{i-1}$, e la media geometrica fra $O2^{i-1}$ ed OA e si otterranno i punti corrispondenti ai punti di mezzo de' segmenti $O2^{i-1}$, $2^{i-1}B$ di Oy. E così di seguito.

Conducansi ora pei punti di divisione di Ox le parallele ad Oy, e pei punti di divisione di Oy le parallele ad Ox; i punti ove si segano le rette così condotte per punti omonimi apparterranno alla logaritmica che si voleva costruire. Siccome ad $y = y_0 = 0$ corrisponde $x = x_0 = Oo$, così la curva passa per lo zero della divisione di Ox.

85. È anche facilissimo costruire la tangente alla curva in un suo punto qualunque (fig. 74). Siano infatti M, N due punti della curva, a piccola distanza l'uno dall'altro; MP, NQ parallele ad Ox, MR parallela ad Oy, e T il punto in cui Oy è segata dalla corda MN. I triangoli simili TPM, MRN dànno

$$TP : MP = MR : NR ,$$

ossia

$$TP : MP = OQ - OP : NQ - MP.$$

Posto $OP = y$, $PQ = h$, le MP, NQ saranno le ascisse x corrispondenti alle ordinate y, $y + h$, epperò

$$MP = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y}{l}}, \quad NQ = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y+h}{l}},$$

dunque

$$TP = \frac{h \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y}{l}}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y+h}{l}} - \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y}{l}}} = l \, \frac{\frac{h}{l}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{h}{l}} - 1} .$$

Suppongasi ora che il punto N si vada accostando sempre più ad M, cioè che h diminuisca convergendo verso zero; allora la NMT tenderà a prendere la posizione della retta tangente in M, e il segmento TP, projezione di TM su Oy, diverrà ciò che si suole denominare s o t t o t a n g e n t e. Ma (**) il limite verso il quale converge la frazione

---

(*) Siccome le x crescono assai più rapidamente delle y, così, a fine di contenere la costruzione entro limiti ristretti, converrà assumere l'unità x_0 più piccola di l, per es: $x_0 \frac{m}{n} = l$.

(**) Baltzer, *Aritmetica generale*, p. 188.

$$\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{h}{l}}-1}{\frac{h}{l}},$$

quando h tenda verso zero, è il logaritmo naturale di $\frac{m}{n}$, che indicheremo con $1\frac{m}{n}$; dunque al limite avremo

$$TP=\frac{l}{1\frac{m}{n}},$$

vale a dire, la sottotangente è costante per tutt'i punti della curva (*).

Donde segue che, quando siasi costruita la tangente in un solo punto, si potranno immediatamente tracciare le tangenti in tutti gli altri punti della curva.

86. Costruita così la curva logaritmica, si potranno risolvere per mezzo di essa tutt' i problemi ai quali servono le ordinarie tavole di logaritmi. Per es. si voglia costruire la radice r-esima del rapporto di due rette p, q. Prendansi su Ox le ascisse $x'=p$, $x''=q$, e per mezzo della curva trovinsi le corrispondenti ordinate y', y''. L'ascissa corrispondente all'ordinata

$$\frac{1}{r}(y'-y'')$$

avrà per valore

$$x_0\sqrt[r]{\frac{p}{q}}.$$

In secondo luogo, si cerchi la radice r-esima del prodotto delle r rette $p_1\, p_2 \dots p_r$. Prese su Ox le ascisse $x_1=p_1$, $x_2=p_2$, $x_3=p_3, \dots x_r=p_r$, trovinsi le corrispondenti ordinate $y_1, y_2, y_3, \dots y_r$. L'ascissa x corrispondente all'ordinata

$$\frac{1}{r}(y_1+y_2+\dots+y_r)$$

avrà appunto il valore cercato

$$\sqrt[r]{p_1\, p_2 \cdots p_r}\,.$$

VI.

Risoluzione delle equazioni numeriche (**).

87. Siano a_0, a_1, $a_2, \dots a_n$ $n+1$ numeri dati in grandezza e segno, e si costruisca un circuito poligonale rettangolare (fig. 75ª), i cui lati successivi 01, 12, 23, ... abbiano lunghezze proporzionali ai numeri dati. Quanto al senso di ciascun lato, tengasi questa legge: il lato r-esimo ed il lato $(r+2)$-esimo,

(*) SALMON, *Higher plane curves*, 2ª ediz. (Dublin, 1873), num. 314.

(**) LILL, *Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue:* Nouvelles Annales de Mathématiques, 2ᵉ série, t. 6 (Paris 1867), p. 359.

che sono fra loro paralleli, abbiano lo stesso senso o sensi opposti, secondo che i segni dei numeri a_{r-1}, a_{r+1}, proporzionali a quei lati, siano contrari o uguali (*).

Quindi, fissato un punto A_1 nella retta 12, si assuma $0A_1$ come primo lato di un secondo circuito rettangolare di n lati, i cui vertici $A_1, A_2, A_3, \ldots$ cadano ordinatamente nei lati 12, 23, 34, ... del primo contorno.

I triangoli $01A_1$, $A_1 2 A_2$, $A_2 3 A_3$, $A_3 4 A_4$, ... sono tutti simili fra loro, epperò dànno

$$\frac{01}{A_1 1} = \frac{A_1 2}{A_2 2} = \frac{A_2 3}{A_3 3} = \frac{A_3 4}{A_4 4} = \ldots = \frac{A_{n-1} . n}{A_n . n},$$

donde, avuto riguardo alle identità

$$\begin{array}{ll} 01 = a_0, & A_1 2 = A_1 1 + a_1, \\ 12 = a_1, & A_2 3 = A_2 2 + a_2, \\ 23 = a_2, & A_3 4 = A_3 3 + a_3, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ n-1 . n = a_{n-1}, & A_n . n+1 = A_n . n + a_n, \\ n . n+1 = a_n, & \end{array}$$

e posto

$$\frac{A_1 1}{01} = x, \text{ ossia } A_1 1 = a_0 x,$$

si cava

$$\begin{aligned} A_1 2 &= a_0 x + a_1, \\ A_2 2 &= a_0 x^2 + a_1 x, \\ A_2 3 &= a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \\ A_3 3 &= a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n . n &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x, \\ A_n . n+1 &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n. \end{aligned}$$

(*) Per fissare con precisione il senso di ciascun lato della spezzata, gioverà la seguente convenzione. Si assumano due assi ortogonali XOX, YOY e per ciascun d'essi si fissi il senso positivo; indi conveniamo di dare al numero esprimente la lunghezza di un segmento il coefficiente $+1$ o -1 secondochè esso abbia la direzione positiva o la negativa di XOX, e il coefficiente $+i$ o $-i$ (dove $i = \sqrt{-1}$, cioè $i^2 = -1$), secondochè esso segmento abbia la direzione positiva o la negativa di YOY. Allora si formi un circuito i cui lati successivi

$$01,\ 12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 56, \ldots$$

siano uguali ad

$$a_0,\ ia_1,\ i^2 a_2,\ i^3 a_3,\ i^4 a_4,\ i^5 a_5, \ldots$$

ossia ad

$$a_0,\ ia_1,\ -a_2,\ -ia_3,\ a_4,\ ia_5, \ldots$$

onde i lati 1°, 3°, 5°, ... saranno paralleli ad XOX, e gli altri ad YOY; inoltre due lati paralleli, separati da un solo lato ad essi perpendicolare, avranno lo stesso senso o senso contrario secondochè i corrispondenti numeri a abbiano segni opposti o lo stesso segno.

ossia, il segmento $A_n . \overline{n+1}$ compreso fra i termini del secondo e del primo circuito poligonale è il valore che prende il polinomio

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

quando per x si ponga il rapporto del segmento $A_1 1$ al segmento 01 od a_0. Ritenuto a_0 positivo, i segni di x e di a_1 saranno uguali od opposti secondo che $A_1 1$, 12 abbiano lo stesso senso o senso contrario.

Se i termini dei due circuiti coincidono, sarà identicamente $f(x) = 0$; allora x si dice radice dell'equazione $f(z) = 0$. Le radici reali dell'equazione $f(z) = 0$ sono adunque i rapporti $A_1 1 : 01$, corrispondenti ai circuiti rettangolari inscritti, i cui termini coincidano col punto $\overline{n+1}$.

A cagione di queste proprietà, si può dire che il circuito $0123 \dots \overline{n+1}$ rappresenta il polinomio intero $f(z)$.

88. Se si inscrive un nuovo circuito rettangolare $0 B_1 B_2 \dots B_n$, indicato con y il rapporto $B_1 1 : 01$, sarà analogamente

$$B_n . \overline{n+1} = f(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n .$$

Invece de' coefficienti a pongansi i loro valori

$$\begin{aligned}
a_0 &= 01 , \\
a_1 &= 12 = A_1 2 - A_1 1 = A_1 2 - 01 . x , \\
a_2 &= 23 = A_2 3 - A_2 2 = A_2 3 - A_1 2 . x , \\
a_3 &= 34 = A_3 4 - A_3 3 = A_3 4 - A_2 3 . x , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n-1} &= \overline{n-1} . n = A_{n-1} . n - A_{n-1} . \overline{n-1} = A_{n-1} . n - A_{n-2} . \overline{n-1} . x , \\
a_n &= n . \overline{n+1} = A_n . \overline{n+1} - A_n . n = A_n . \overline{n+1} - A_{n-1} . n . x
\end{aligned}$$

e si otterrà

$$\begin{aligned}
B_n . \overline{n+1} = 01 . y^n &+ (A_1 2 - 01 . x) y^{n-1} \\
&+ (A_2 3 - A_1 2 . x) y^{n-2} \\
&+ \dots\dots\dots\dots \\
&+ (A_{n-1} n - A_{n-2} \overline{n-1} . x) y \\
&+ A_n \overline{n+1} - A_{n-1} n . x \\
= (y - x) \big[01 . y^{n-1} &+ A_1 2 . y^{n-2} + A_2 3 . y^{n-3} + \dots \\
\dots &+ A_{n-1} n \big] + A_n . \overline{n+1} .
\end{aligned}$$

Ma

$$B_n . \overline{n+1} - A_n . \overline{n+1} = B_n A_n$$

e

$$y - x = \frac{B_1 1 - A_1 1}{01} = \frac{B_1 A_1}{01} ;$$

dunque

$$01 . \frac{B_n A_n}{B_1 A_1} = 01 . y^{n-1} + A_1 2 . y^{n-2} + A_2 3 . y^{n-3} + \dots + A_{n-1} n .$$

Questo risultato si può enunciare così (fig. 76, dove $n = 6$): Nel circuito rettangolare di $n+1$ lati $0123 \dots \overline{n+1}$ s'inscrivano due circuiti

rettangolari di n lati $0A_1 A_2 \ldots A_n$, $0B_1 B_2 \ldots B_n$. Poi si formi un nuovo circuito rettangolare $012'3' \ldots n'$ di n lati, i quali siano ordinatamente paralleli ai lati del primo circuito e uguali a 01, $A_1 2$, $A_2 3, \ldots, A_{n-1} n$; e in esso s'inscriva il circuito rettangolare di $n-1$ lati, $0B_1 B_2' \ldots B'_{n-1}$, avente il lato $0B_1$ comune col circuito già descritto $0B_1 B_2 \ldots B_n$. Allora sarà

$$\frac{B'_{n-1} n'}{01} = \frac{B_n A_n}{B_1 A_1} ;$$

vale a dire, il segmento $B'_{n-1} n'$ sarà il risultato della divisione di $f(y) - f(x)$ per $y - x$: dove il polinomio f è quello rappresentato dal primo circuito $012 \ldots n+1$, e le x, y esprimono i rapporti $A_1 1 : 01$, $B_1 1 : 01$.

In altre parole ancora, il circuito $012'3' \ldots n'$ rappresenta il polinomio

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

ovvero il polinomio $f(z) : z - x$, nel caso che x sia una radice dell'equazione $f(z) = 0$.

89. Gli stessi triangoli simili già considerati dànno:

$$\frac{01}{0A_1} = \frac{A_1 2}{A_1 A_2} = \frac{A_2 3}{A_2 A_3} = \frac{A_3 4}{A_3 A_4} = \ldots = \frac{A_{n-1} n}{A_{n-1} A_n},$$

epperò l'equazione si può anche scrivere come segue:

$$0A_1 \cdot \frac{B_n A_n}{B_1 A_1} = 0A_1 \cdot y^{n-1} + A_1 A_2 \cdot y^{n-2} + A_2 A_3 \cdot y^{n-3} + \ldots + A_{n-1} A_n ,$$

risultato che s'interpreta così (fig. 77):

Nel circuito rettangolare di $n+1$ lati $0123 \ldots n+1$ (fig. 77, dove $n = 6$) si inscrivano i due circuiti rettangolari di n lati, $0A_1 A_2 \ldots A_n$, $0B_1 B_2 \ldots B_n$; e nel primo di essi s'inscriva un circuito rettangolare di $n-1$ lati $0C_1 C_2 \ldots C_{n-1}$, dove sia

$$\frac{C_1 A_1}{0A_1} = y = \frac{B_1 1}{01} ;$$

allora sarà

$$\frac{B_n A_n}{B_1 A_1} = \frac{C_{n-1} A_n}{0A_1} ;$$

vale a dire, $C_{n-1} A_n$ è ancora uguale al quoziente

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

moltiplicato però per $\frac{0A_1}{01}$.

In altre parole: ridotte le lunghezze nel rapporto $0A_1 : 01$, il circuito $0A_1 A_2 \ldots A_n$ rappresenta il polinomio

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

ovvero il polinomio $f(z):z-x$ nel caso che x sia una radice dell'equazione $f(z)=0$.

Dunque ogni circuito rettangolare di n lati inscritto nel circuito dato e avente con questo i termini comuni è un circuito risolvente rispetto al dato medesimo, giacchè rappresenta il quoziente che risulta dal dividere il polinomio rappresentato dal circuito dato per uno de' suoi fattori lineari.

90. Sia ancora il polinomio intero di grado n, $f(z)$, rappresentato dal contorno $0123\ldots n+1$; nel quale vengano inscritti (fig. 78) i due contorni $0A_1A_2\ldots A_n$, $0B_1B_2\ldots B_n$. Supponiamo che i punti A_n, B_n coincidano entrambi coll'estremo $n+1$ del contorno dato; vale a dire, siano $0A_1A_2\ldots$, $0B_1B_2\ldots$ due contorni risolventi rispetto al contorno dato. Siano poi $L_1, L_2\ldots, L_{n-2}$ i punti d'intersezione delle coppie di lati A_1A_2 e B_1B_2, A_2A_3 e B_2B_3, ..., $A_{n-2}A_{n-1}$ e $B_{n-2}B_{n-1}$. I triangoli $0A_1B_1$, $L_1A_2B_2$ sono simili, per avere i lati corrispondenti ortogonali; e per la stessa ragione sono simili i triangoli $A_1B_1L_1$, $A_2B_2L_2$: dunque sono simili i quadrangoli $0A_1B_1L_1$, $L_1A_2B_2L_2$, donde segue essere perpendicolari fra loro i lati $0L_1$, L_1L_2. Medesimamente si dimostrano retti gli angoli $L_1L_2L_3$, $L_2L_3L_4$, ..., $L_{n-3}L_{n-2}\overline{n+1}$.

Dunque i punti $0L_1L_2\ldots L_{n-2}\overline{n+1}$ sono i vertici di un contorno (di $n-1$ lati) che è rettangolare ed inscritto così nel contorno $0A_1A_2\ldots\ldots$ come nel contorno $0B_1B_2\ldots$; vale a dire, $0L_1L_2\ldots$ è un contorno risolvente rispetto a ciascuno dei contorni $0A_1A_2\ldots$, $0B_1B_2\ldots$ In altre parole, ridotte le lunghezze nel rapporto $\frac{0L_1}{01}$, il contorno $0L_1L_2\ldots L_{n-2}\overline{n+1}$ rappresenta il polinomio di grado $n-2$

$$\frac{f(z)}{(z-x)(z-y)}$$

essendo $x=0A_1:01$, $y=0B_1:01$.

91. Sia data l'equazione di 2° grado

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0.$$

Costruito il circuito 0123 (fig. 79), i cui lati 01, 12, 23 esprimono i coefficienti a_0, a_1, a_2, per trovarne una radice, basterà formare un angolo retto il cui vertice A cada su 12, e i cui lati passino per 0,3. Dunque descrivasi il semicerchio sul diametro 03; se esso sega 12 in due punti A_1, A_2, saranno $\frac{A_11}{a_0}$, $\frac{A_21}{a_0}$ le radici dell'equazione proposta.

Per le note proprietà del cerchio, si ha

$$A_21=2A_1,$$

dunque

$$A_11+A_21=2A_1+A_11=21,$$

ossia

$$\frac{A_11+A_21}{a_0}=-\frac{a_1}{a_0},$$

vale a dire: la somma delle radici è $-\frac{a_1}{a_0}$.

Poi, i triangoli simili $01A_1$, A_123 dànno

$$01:A_11=A_12:32,$$

ossia

$$a_0 : A_1 1 = - A_2 1 : - a_2,$$

donde

$$\frac{A_1 1 \cdot A_2 1}{a_0^2} = \frac{a_2}{a_0};$$

vale a dire: il prodotto delle radici è $\frac{a_2}{a_0}$.

Basandosi sul teorema che precede (N. 88), il sig. Lill ha ideato un semplice apparecchio, avente per iscopo la determinazione delle radici di una data equazione numerica. L'apparecchio consiste in un disco circolare, che può essere di legno, perfettamente piano, sul quale è incollata una carta quadrettata. Dal centro del disco, che deve restare fisso, sorge un perno intorno al quale può ruotare un altro disco di ugual diametro, di vetro smerigliato. Il vetro essendo trasparente, coll'ajuto della carta quadrettata sottoposta, si può immediatamente disegnare su di esso il circuito corrispondente all'equazione proposta. In seguito, facendo girare il piatto di vetro, la carta quadrettata guida l'occhio a riconoscere il circuito che determina una radice. Una graduazione della circonferenza del disco quadrettato permette che dalla deviazione del primo lato del secondo circuito dal primo lato del primo circuito si concluda la grandezza della radice. A quest'uopo, il primo lato del circuito corrispondente all'equazione deve dirigersi verso lo zero della graduazione.

VII.

Trasformazione delle figure piane (*).

92. Ridurre una data figura ad una data base b significa trasformare quella figura in un rettangolo la cui base sia b, ossia trovare una retta f che moltiplicata per b dia l'area della figura proposta. Invece di costruire un rettangolo di base b, si potrà costruire un triangolo di base $2b$; l'altezza di questo triangolo sarà la retta f domandata. Il segmento b dicesi base di riduzione.

Quando più figure si riducono ad una stessa base b, le corrispondenti rette $f_1, f_2 \ldots$ riescono proporzionali alle aree di quelle; donde segue che la riduzione di una figura ad una data base equivale alla determinazione dell'area della figura medesima.

La figura data sia il triangolo OAB' (fig. 80), la cui base OA s'indichi con a, e l'altezza con h. Dovendo l'area conservarsi inalterata dalla trasformazione, avremo $fb = \frac{1}{2}ah$, donde

(*) Culmann, *l. c.*, N. 5.

$$f = a \cdot \frac{h}{2b} = h \frac{a}{2b} ,$$

vale a dire, si tratta di moltiplicare a pel rapporto $h:2b$, oppure h pel rapporto $a:2b$.

Dunque, presa $OC = 2b$ e condotta CB, si tiri AD parallela a CB.

Oppure, preso in OB quel punto D, la cui distanza da OA è $=2b$, si tirino le DA, BC parallele.

Condotta la CD, saranno equivalenti i triangoli OAB, OCD, perchè si ottengono aggiungendo o togliendo ad uno stesso triangolo OAD (secondo che sia OC maggiore o minore di OA) i triangoli equivalenti ADB, ADC. Dunque il cercato segmento f sarà, nella prima costruzione, l'altezza del punto D sulla OC, e nella seconda la lunghezza OC.

93. Non è necessario che una delle dimensioni $2b$, f cada in un lato del triangolo dato. Si può prendere come doppia base $2b$ una retta BC (fig. 81) condotta dal vertice B sul lato opposto OA, purchè $2b$ non sia minore della distanza di B da OA; allora la corrispondente altezza f sarà OD, antiprojezione di OA sulla BC. Oppure si potrà, se $2b$ non è maggiore di OA, assumere per doppia base $2b$ la OD, corda del semicerchio di diametro OA: in questo caso l'altezza f sarà la BC parallela alla corda supplementare DA.

94. Si debba ridurre alla base b il quadrilatero $ABCD$ (fig. 82); condotta CO parallela alla diagonale BD, il quadrilatero si trasforma nel triangolo OAB; quindi si procederà come fu detto sopra; cioè, p. e.: tirata la $BC' = 2b$, l'antiprojezione OD' (di OA su BC') sarà la dimensione cercata f.

95. Si può operare la riduzione anche senza prima trasformare il dato quadrilatero $ABCO$ in un triangolo. Presa come ipotenusa la diagonale OB (fig. 83, 84, 85, 86), supposta non minore di $2b$, si costruisca un triangolo rettangolo ODB, il cateto BD del quale sia uguale a $2b$. Projettinsi, mediante raggi paralleli ad OB, i punti A, C in A', C' sull'altro cateto: i triangoli OCB, OBA saranno equivalenti ai due $OC'B$, OBA': ma in questi la distanza della base OC' od $A'O$ dal vertice opposto è uguale a $2b$; dunque la dimensione f pel quadrilatero sarà $OC' + A'O = A'C'$.

Nel quadrilatero intrecciato (N. 17) della fig. 87ª, se AC è parallela a BO, i punti A', C' coincidono, epperò $f=0$. Infatti, in questo caso l'area $ABCO$ è uguale alla somma di due triangoli UAB, UCO, che sono uguali, ma opposti di segno.

96. La dimensione f è anche uguale al segmento determinato dalle AA', CC' sulla retta condotta per A o per C e parallela ad $A'C'$.

97. La costruzione precedente suppone $2b$ non maggiore della maggior diagonale OB del quadrilatero. Se $2b > OB$, si potranno invertire fra loro le dimensioni $2b$ ed f. Cioè conducasi AE parallela ad OB e facciasi $CE = 2b$; poi, costruito sull'ipotenusa OB un triangolo rettangolo ODB che abbia un cateto OD parallelo a CE, l'altro cateto BD sarà $= f$.

98. Per ridurre ad una data base un poligono, il cui perimetro sia intrecciato o no, si comincierà dal trasformarlo in un quadrilatero equivalente. Quindi si applicherà al quadrilatero la costruzione suindicata per ottenere quel segmento f che, moltiplicato per la base b, fornisce l'area del poligono proposto.

Il poligono dato sia 012345678 (fig. 88); conducendo

la retta	$8'7'$	parallela alla	diagonale	07,
»	$7'6'$	»	»	06,
»	$6'5'$	»	»	05,
»	$5'4'$	»	»	04,
»	$4'3'$	»	»	03,

il poligono si trasforma successivamente ne' poligoni equivalenti $01234567'$, $0123456'$, $012345'$, $01234'$, $0123'$, che man mano hanno un lato di meno (*). Finalmente si giunge al quadrilatero $0123'$.

99. In questa costruzione i nuovi lati $07'$, $06'$, $05'$... de' poligoni trasformati sono raggi uscenti dal vertice fisso 0. Ma si può anche procedere in modo che tutti i nuovi vertici $7'$, $6'$, $5'$,... cadano sopra un lato fisso.

Abbiasi p. e. (fig. 89) il circuito $Aabcde\,C012345$; conducendo

$11'$	parallela a	20	sino ad incontrare il lato fisso $0C$,
$22'$	»	$31'$	
$33'$	»	$42'$	
$44'$	»	$53'$	
$5D$	»	$A4'$	

(*) I triangoli 078, $077'$ sono equivalenti, perchè le rette 07, $87'$ sono parallele; togliendo il primo ed aggiungendo il secondo triangolo al poligono dato, si ottiene il nuovo poligono $01234567'$. E così di seguito.

si determina la retta AD che può essere sostituita alla spezzata $A543210$. Infatti, essendo parallele le $11'$, 20, sono equivalenti i triangoli 120, $1'20$; e togliendo il primo, aggiungendo il secondo al poligono dato, questo si trasforma in $AabcdeC1'2345$. Così, essendo equivalenti i triangoli $1'23$, $1'2'3$, l'ultimo poligono si trasforma in $AabcdeC2'345$; e via di seguito, sinchè si arriva al circuito $AabcdeCD$.

Per operare una simigliante trasformazione della spezzata $AabcdeC$, si conducano

$$\left.\begin{array}{lcl} bb' & \text{parallela a} & ca \\ cc' & \text{»} & db' \\ dd' & \text{»} & ec' \\ eB & \text{»} & Cd' \end{array}\right\} \text{sino a incontrare il lato fisso } Aa,$$

e tutto il poligono $AabcdeCD$ si troverà ridotto al quadrilatero equivalente $ABCD$.

100. Questo metodo è il più comodo e conveniente per trovare le aree di figure i cui perimetri siano conformati ne' modi più svariati. Con un po' d'esercizio si impara ad eseguire la trasformazione affatto meccanicamente, e senza aver alcun riguardo alla forma del circuito proposto. Queste costruzioni permettono inoltre d'aver riguardo ai segni; così che, se si ha a fare con aree di segno diverso, il risultato dà senz'altro a conoscere il segno che gli compete (*).

Si abbia per es. il circuito intrecciato (fig. 90) $ABC01234$, rappresentante la sezione di una massa di terra, in isterro e riporto. Conducendo

$$\begin{array}{lcl} 11' & \text{parallela a} & 20\,, \\ 22' & \text{»} & 31'\,, \\ 33' & \text{»} & 42'\,, \\ 4D & \text{»} & A3'\,, \end{array}$$

sino ad incontrare il lato $C0$, si trasforma il poligono dato nell'equivalente quadrilatero $ABCD$: il quale dà per conseguenza la differenza fra l'area di riporto $ABCI4$ e quella di sterro $I0123$, le quali sono di segno contrario. Il circuito $ABCD$ avrà lo stesso senso del circuito $ABCI4$ o del circuito $I0123$, secondo che è maggiore il riporto o lo sterro (**).

101. Figure circolari. Un settore circolare OAB (fig. 91) è equivalente ad un triangolo OAC che abbia il vertice nel centro O e per base una porzione AC di tangente uguale all'arco AB. Per

(*) Culmann, *l. c.*, p. 28. — (**) *Ibid.*, p. 29.

isviluppare (con approssimazione) l'arco AB sulla tangente, si assume dapprima un piccolo arco α, che possa con errore trascurabile essere surrogato dalla sua corda a; si applica la corda a sull'arco dato, a partire dall'estremo B, e si ripete successivamente quante volte è possibile, sino a che si cada nel punto A o in un punto prossimo A'. Allora, partendo da A', si porterà lo stesso numero di volte la corda a sulla tangente AC (*).

Il settore circolare OAB equivale adunque al triangolo rettilineo OAC. Il segmento circolare AB (ossia l'area compresa fra l'arco e la corda AB) è la differenza de' triangoli OAC, OAB, epperò equivale al quadrilatero intrecciato $OBAC$.

102. Non è necessario che la tangente, sulla quale si sviluppa l'arco, passi per un estremo dell'arco medesimo, ma può invece toccarlo in un altro punto qualunque T (fig. 92); allora si sviluppa l'arco AT sulla CT e l'arco BT sulla DT. Il settore OAB si trasforma nel triangolo OCD; ed il segmento circolare AB equivale alla differenza $OCD-OAB$, ossia alla figura intrecciata $OCDOBAO$, che è da considerarsi come un esagono, due vertici del quale sono riuniti in O (fig. 93). Condotte OB', OA' parallele rispettivamente alle AC, BD, i triangoli OAC, OBD si trasformano in $B'AC$, $A'BD$; epperò il segmento circolare è equivalente al quadrilatero $A'B'CD$.

103. Esempio. La figura da ridursi sia il quadrilatero mistilineo $ACD3$, compreso fra gli archi circolari non concentrici AC, $3D$ e le rette $CD, A3$ (fig. 94). I centri de' due archi siano 0, 1; la data figura sarà uguale al settore $0AC$ diminuito dal settore $13D$ e del quadrilatero $0A1C$. Sviluppando i due archi sulle rispettive tangenti iniziali AB, 32, i due settori circolari si trasformano nei triangoli $0AB$, 132; ond'è che la figura data sarà uguale al triangolo $0AB$ diminuito dello spazio $0A321C0$, uguale cioè al poligono intrecciato $AB0C123A$. Il quale, tirando

$11'$ parallela a $2C$,
$22'$ » $31'$,
$3C'$ » $A2'$,

sino ad incontrare il lato fisso $0C$, si trasforma nel quadrilatero intrecciato $AB0C'$. Quindi si troverà l'area bf di questo quadri-

(*) Culmann, *l. c.*, p. 37. Veggansi in una nota alla fine di questo libretto una regola di Rankine per rettificare con approssimazione gli archi circolari, ed una lettera del prof. A. Sayno sullo stesso soggetto.

latero col solito metodo; cioè, si costrurrà sulla diagonale AO (come ipotenusa) un triangolo rettangolo, un cateto del quale sia $AE=2b$; la dimensione f sarà la distanza, misurata parallelamente al secondo cateto, del punto B dalla retta parallela ad AO e passante per C'.

104. Come altro esempio, vogliasi determinare l'area della figura 95, che rappresenta la sezione di un ferro ad U, e che è composta: 1° di una lunula $AEA'F$ compresa fra due archi circolari, l'uno di centro U, l'altro di centro O; 2° di una corona $CBFB'C'$ compresa fra due archi circolari BB', CC' concentrici (centro O); 3° di due parti rettilinee (*) uguali $BCJIH$, $B'C'J'I'H'$, simmetriche rispetto alla retta $OUFE$, che è pure asse di simmetria per l'intera figura.

La lunula è uguale al settore $UAEA'$, più il quadrilatero $OAUA'$, meno il settore $OAFA'$, ossia è uguale alla somma $UAEA'+OAUA'$, $+AOA'F$. Trasformati i due settori predetti ne' triangoli UAD, AOG (dove AD, AG rappresentano gli sviluppi degli archi AEA', AFA' sulle rispettive tangenti iniziali), la lunula sarà uguale alla somma $UAD+OAUA'+AOG$, ossia (percorrendo questi tre circuiti consecutivamente, come se formassero un circuito solo) all'area del circuito $ADUA'OAOGA$. In questo circuito si può omettere la parte OA che è percorsa due volte in senso contrario (N. 22); dunque la lunula equivale all'esagono intrecciato $ADUA'OGA$.

La corona si consideri come differenza de' settori OBB', OCC'. Sviluppando gli archi sulle tangenti medie PP', QQ', siccome le rette PQ, $P'Q'$ passano per O, così la corona riesce uguale al trapezio $PP'Q'Q$, che è la differenza de' due triangoli OPP', OQQ' equivalenti ai settori anzidetti.

Se ora si riducono alla base b l'esagono $ADUA'OG$, il trapezio $PP'Q'Q$ ed il pentagono $BCJIH$, e si trovano le corrispondenti misure f, f_1, f_2, sarà $b\,(f+f_1+2f_2)$ l'area della figura proposta (**).

Ovvero si consideri la figura data come aggregato di triangoli e trapezi, nel modo che segue:

$$UAD+2OAU-OAG+OPP'-OQQ'+2BCKH+2CJIK$$

(dove la retta CK fu condotta parallelamente alle BH, JI); si

(*) Diciamo rettilinee, perchè imaginiamo surrogati i piccoli archi CJ, $C'J'$ dalle rispettive corde.

(**) Nella fig. 95 si è trovato a dirittura il $2f_2$, adoperando b invece di $2b$ nella riduzione della figura $B'C'J'I'H'$.

considerino le aree di queste parti triangolari o trapezie come prodotti di due fattori; e si riducano questi prodotti alla base b mediante il poligono di moltiplicazione. S'intende da sè che per ciascuna area da sottrarsi uno de' fattori dovrà essere preso negativamente (fig. 95 *bis*).

105. Figure curvilinee in generale (*). — È proprietà notissima della parabola che un segmento parabolico (fig. 96) equivale a 4/3 del triangolo, la cui base sia la corda della parabola, che è base del segmento, ed il vertice sia il punto dell'arco ove la tangente è parallela alla base, vale a dire, il segmento parabolico equivale ad un triangolo, la cui base sia la corda e la cui altezza sia 4/3 della saetta: chiamando saetta la distanza normale fra la corda e la tangente dell'arco parallela alla corda.

106. Un metodo di trasformazione delle figure curvilinee consiste nel considerare le piccole porzioni del contorno curvilineo come archi di parabola. Se una linea curva (fig. 97) è divisa in piccoli archi, ciascuno de' quali possa approssimativamente essere riguardato come arco parabolico; e se i segmenti parabolici contenuti dagli archi e dalle rispettive corde si trasformano in triangoli, le cui basi siano le corde stesse, i vertici di questi triangoli si potranno prendere arbitrariamente su rette che siano parallele alle corde e da esse abbiano distanze uguali ai 4/3 delle rispettive saette. Prendansi questi vertici in modo che il vertice di ogni nuovo triangolo sia sul prolungamento di un lato del triangolo precedente, vale a dire che i vertici di due triangoli successivi siano sempre in linea retta col punto comune alle loro basi. Allora il circuito curvilineo si troverà trasformato in un circuito rettilineo equivalente, formato da tanti lati quanti sono i segmenti in cui fu diviso il circuito dato. Il circuito o poligono rettilineo verrà poi di nuovo trasformato in un quadrilatero e poi ridotto alla base data, nel modo che fu già esposto.

107. *Esempio.* Vogliasi (fig. 98) alla linea irregolare AB di confine fra due proprietà sostituire una spezzata di due tronchi rettilinei, avente i termini in A, B.

Si consideri il circuito formato dalla curva AB e dalla retta BA, e si trasformi in un triangolo di base BA. A tale uopo si divida la curva AB in piccoli archi; si tirino le corde ed ai segmenti così formati si sostituiscano de' triangoli, secondo il processo dianzi esposto; per tal modo il circuito anzidetto si sarà trasformato nel poligono rettilineo $A012345B$. Poi conducendo

$11'$	parallela a	20
$22'$	»	$31'$
$33'$	»	$42'$
$44'$	»	$53'$
$5C$	»	$B4'$

sino ad incontrare il lato fisso $A0$, cotesto poligono sarà trasformato nel triangolo ACB; epperò alla linea irregolare data si saranno sostituiti i due tronchi rettilinei AC, CB. Il punto C si potrebbe spostare ad arbitrio sopra una linea parallela ad AB, giacchè per tal guisa l'area ACB non viene alterata.

(*) Culmann, *l. c.*, N. 12.

108. La riduzione delle aree ad una base data suggerisce un'altra costruzione della risultante di più segmenti A_1B_1, A_2B_2 . . . , dati di grandezza, senso e posizione (fig. 99). Assumasi un punto O come origine di un circuito poligonale, i cui lati siano ordinatamente equipollenti ai segmenti dati; e sia N il termine del circuito. Si trasformino i triangoli OA_1B_1, OA_2B_2 . . . , riducendoli alla base comune ON: e propriamente si trasformino quei triangoli in modo che abbiano un vertice in O e la base opposta sia equipollente ad ON. Allora anche la somma $OA_1B_1+OA_2B_2+\ldots$, si troverà trasformata in un triangolo OAB, dove AB è equipollente ad ON. Il segmento AB è la risultante domandata (N. 43).

Per operare la trasformazione sovraccennata converrà prendere le origini A_1, A_2, . . . , de' segmenti, in linea retta con O. Projettando i punti B_1, B_2, . . . in B_1', B_2', . . . sulla ON, mediante raggi paralleli alla $OA_1A_2\ldots$, i triangoli OA_1B_1, OA_2B_2, . . . , si trasformano in OA_1B_1', OA_2B_2', . . . Indi conducansi le $B_1'C_1$, $B_2'C_2$, . . . , ordinatamente parallele alle NA_1, NA_2, ... e siano C_1, C_2, . . . i punti in cui esse segano la $OA_1A_2\ldots$; onde si avranno i triangoli OC_1N, OC_2N, . . . , rispettivamente equivalenti ad OA_1B_1', OA_2B_2', . . . Perciò se nella OA_1A_2 . . . si prende il segmento $OA=OC_1+OC_2+\ldots$, e se per A si conduce AB equipollente ad ON, sarà $OAB=OA_1B_1+OA_2B_2+\ldots$

VIII.

Baricentri.

109. Ne' teoremi dei N[i] 40, 41 suppongansi i punti $B_1B_2\ldots B_n$ tutti coincidenti in un solo punto G. Allora quegli enunciati si riducono ai seguenti:

Se A_1G, A_2G, . . , A_nG sono n segmenti la cui risultante sia zero, assunto un punto O ad arbitrio nel piano, la risultante de' segmenti OA_1, OA_2, . . . , OA_n sarà uguale (equipollente) ad n volte il segmento OG (fig. 100).

Viceversa, dati n punti A_1, A_2, . . . A_n, se la risultante delle rette OA_1, OA_2, . . . , OA_n che congiungono un polo O ai punti dati è uguale a n volte la retta OG che da O va ad un punto G, la stessa proprietà avrà luogo per qualsivoglia altro polo O'; cioè la risultante

delle $O'A_1$, $O'A_2$, ... $O'A_n$ sarà n volte il segmento $O'G$; e la risultante delle GA_1, GA_2, ... GA_n sarà nulla (*).

110. Il punto G dicesi baricentro de' punti A_1, A_2, ..., A_n. Dati i punti A_1, A_2, ..., A_n (fig. 101, dove $n=4$) per costruire il loro baricentro G, si procederà come segue: preso un polo arbitrario O, si costruisca un circuito $OA_1 2 3 \ldots n$, la cui origine sia O e i cui lati siano successivamente equipollenti ai segmenti OA_1, OA_2, ..., OA_n. La retta On che chiude il circuito passerà pel punto G, e sarà $OG = \frac{On}{n}$. Invece di dividere On in n parti uguali, per ottenere G si potrà costruire un secondo circuito, partendo da un'altra origine O'; la retta che chiude questo nuovo circuito segherà On nel punto G cercato.

111. Il sistema degli n punti dati non può avere un altro baricentro G'. Infatti, se oltre ad essere nulla la risultante di GA_1, GA_2, ..., GA_n, fosse anche nulla la risultante di $G'A_1$, $G'A_2$, ..., $G'A_n$, sarebbe nulla la risultante generale di tutti i segmenti GA_1, A_1G', GA_2, A_2G', ..., GA_n, A_nG'. Ma componendo i due segmenti GA_r, A_rG' si ha il segmento GG'; dunque dev'essere nullo GG', ossia G' dee coincidere con G.

112. Se anche nel teorema del N. 42 si suppongono coincidenti i punti B_1, B_2, ..., B_n in un solo punto G, si ottiene l'enunciato:

Se G è il baricentro de' punti 1, 2, 3, ..., n, e se tutti questi punti si projettano in G', 1', 2', 3', ..., n' su di una retta, mediante raggi paralleli, la somma delle rette 11', 22', 33', ..., nn' sarà uguale ad n volte la retta GG' (fig. 102).

In virtù di questo teorema, siccome rr' è la distanza (obliqua) del punto r dalla retta sulla quale si è eseguita la projezione, così il punto G vien denominato anche centro delle medie distanze dei punti dati 1, 2, 3, ..., n (**).

113. Invece di supporre ne' teoremi dei N[i] 40, 41 che tutti i punti B_1, B_2 ... B_n coincidano in un solo G, imaginiamo ora che alcuni di essi B_1, B_2, ... B_i siano distinti dai rimanenti, i quali coincidano in un solo G; sicchè sarà nulla la risultante de' segmenti A_1B_1, A_2B_2, ..., A_iB_i, $A_{i+1}G$, ..., A_nG, e, qualunque sia O, la risultante di OA_1, OA_2, ... OA_n sarà uguale alla risultante

(*) Grassmann, *l. c.*, p. 141. — Chelini, *Sui centri de' sistemi geometrici*. (Raccolta scientifica, Roma, marzo 1849), § 1.

(**) Carnot, *Corrélation des figures de géométrie* (Paris 1801), n. 209.

di OB_1, OB_2, . . . OB_i, $(n-i)\ OG$. La prima di queste uguaglianze non si altera se invece del segmento A_rB_r poniamo i due A_rG, GB_r, ovvero A_rG, $-B_rG$; e anche la seconda uguaglianza continuerà a sussistere se all'una e all'altra risultante si aggiungano i segmenti B_1O, B_2O, . . . , B_iO, sicchè ne verrà l'uguaglianza fra la risultante delle OA_1, OA_2, . . . , OA_n, B_1O, B_2O, . . . , B_iO e la risultante delle OB_1, OB_2, . . . OB_i, B_1O, B_2O, . . . , B_iO, $(n-i)\ OG$, ossia fra la risultante delle OA_1, OA_2, . . . , OA_n, $-OB_1$, $-OB_2$, . . . , $-OB_i$ e la $(n-i)\ OG$. Dunque:

Se è nulla la risultante de' segmenti A_1G, A_2G, . . . , A_nG, $-B_1G$, $-B_2G$, ... , $-B_iG$, per qualunque punto O sarà la risultante de' segmenti OA_1, OA_2, . . . , OA_n, $-OB_1$, $-OB_2$, . . , $-OB_i$ uguale ad $(n-i)\ OG$; e viceversa se per un polo O sussiste questa uguaglianza, essa sussisterà per qualsivoglia altro polo O', e sarà nulla la risultante de' segmenti A_1G, A_2G, . . . , A_nG, $-B_1G$, $-B_2G$, . . . , $-B_iG$.

114. Degli n punti A_1, A_2, . . . A_n suppongo ora che alcuni coincidano insieme in un solo punto, altri coincidano del pari in un altro punto ecc.; e che anche i punti B_1, B_2, . . . B_i si riuniscano e coincidano per gruppi. Allora, indicando con α_1, α_2, α_3, . . . numeri interi, positivi o negativi, la cui somma sia m, il teorema che precede potrà enunciarsi così:

Se i punti A_1, A_2, A_3, ... e G sono tali che sia nulla la risultante de' segmenti $\alpha_1.A_1G$, $\alpha_2.A_2G$, $\alpha_3.A_3G$, . . . , qualunque sia il polo O sarà $m.OG$ uguale alla risultante de' segmenti $\alpha_1.OA_1$, $\alpha_2.OA_2$, $\alpha_3.OA_3$, . . .

E viceversa: se per un polo O sussiste questa proprietà, che $m.OG$ sia uguale alla risultante di $\alpha_1.OA_1$, $\alpha_2.OA_2$, $\alpha_3.OA_3$, . . . , la medesima proprietà sussisterà per qualsivoglia altro polo O', cioè la risultante de' segmenti $\alpha_1.O'A_1$, $\alpha_2.O'A_2$, $\alpha_3.O'A_3$, . . . , sarà uguale ad $m.O'G$; e la risultante de' segmenti $\alpha_1.GA_1$, $\alpha_2.GA_2$, $\alpha_3.GA_3$, . . . , sarà zero.

115. Il punto G dicesi baricentro de' punti A_1, A_2, A_3 . . ai quali siano applicati i coefficienti α_1, α_2, α_3, . . . : ovvero, per brevità di discorso diremo che G è il baricentro de' punti $\alpha_1.A_1$, $\alpha_2.A_2$, $\alpha_3.A_3$, . . . , scrivendo dinanzi a ciascun punto il coefficiente che gli spetta.

116. Dal teorema del N. 42 si ha poi:

Se G è il baricentro de' punti $\alpha_1.A_1$, $\alpha_2.A_2$, $\alpha_3.A_3$, . . . ,

e se i punti G, A_1, A_2, A_3, . . . , si projettano in G', A_1', A_2', A_3', . . . , su di una retta, mediante raggi paralleli, la somma delle rette $\alpha_1 . A_1A_1'$, $\alpha_2 . A_2A_2'$, $\alpha_3 . A_3A_3'$, . . . , è uguale ad $m . GG'$, dove $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$

Per questa proprietà, G dicesi anche centro delle medie distanze de' punti $\alpha_1 A_1$, $\alpha_2 A_2$, $\alpha_3 A_3$ . . . (*).

117. Sin qui i coefficienti α_1, α_2, α_3, . . . , applicati ai punti dati A_1, A_2, A_3, . . . , sono numeri interi, positivi o negativi. Ora estenderemo il concetto di baricentro al caso che le α_1, α_2, α_3, . . . siano numeri qualisivogliano, o piuttosto siano segmenti paralleli, proporzionali a grandezze arbitrariamente date.

Siano dati adunque i punti A_1, A_2, A_3, . . . , ai quali siano applicati i numeri o i segmenti paralleli α_1, α_2, α_3, . . . Su di una retta p' si projettino, con raggi paralleli ad una direzione fissata ad arbitrio, i punti dati, in A_1', A_2', A_3', . . . ; e con raggi paralleli ad un'altra direzione, pure fissata ad arbitrio, si projettino gli stessi punti dati in A_1'', A_2'', A_3'', . . . , su di una seconda retta p'', non parallela a p'. Ora si determini una retta r' parallela a p', tale che la distanza da r' a p', misurata parallelamente ai raggi A_1A_1', A_2A_2', . . . , sia uguale ad

$$\frac{\alpha_1 . A_1A_1' + \alpha_2 . A_2A_2' + \alpha_3 . A_3A'_3 + \ \ldots}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots} ;$$

e così pure si determini una retta r'' parallela a p'', tale che la distanza da r'' a p'', misurata parallelamente ai raggi A_1A_1'', A_2A_2'', . . . , sia uguale ad

$$\frac{\alpha_1 . A_1A_1'' + \alpha_2 . A_2A_2'' + \alpha_3 . A_3A_3'' + \ldots}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots} .$$

Indicando con G il punto comune alle r', r'', e con G', G'' le projezioni di G sulle p', p'', fatte con raggi rispettivamente paralleli alle A_1A_1', A_1A_1'', si avrà dunque

$$\alpha_1 . A_1A_1' + \alpha_2 . A_2A_2' + \alpha_3 . A_3A_3' + \ldots = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots) GG' ,$$
$$\alpha_1 . A_1A_1'' + \alpha_2 . A_2A_2'' + \alpha_3 . A_3A_3'' + \ldots = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots) GG''.$$

Sia p''' una terza retta data qualsivoglia, e su di essa si projettino in A_1''', A_2''', A_3''', . . . , G''' i punti dati e il punto G

(*) L'Huilier, *Élémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique etc.* (Paris 1809), § 2.

con raggi paralleli ad una nuova direzione. Fra i tre raggi projettanti uno stesso punto A_1 o A_2 o A_3 . . . avrà luogo (N. 16) una relazione lineare con coefficienti costanti, cioè si avrà

$$k' \,.\, A_1A_1' + k'' \,.\, A_1A_1'' + k''' \,.\, A_1A_1''' = k \;,$$
$$k' \,.\, A_2A_2' + k'' \,.\, A_2A_2'' + k''' \,.\, A_2A_2''' = k \;,$$
$$k' \,.\, A_3A_3' + k'' \,.\, A_3A_3'' + k''' \,.\, A_3A_3''' = k \;,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$k' \,.\, GG' + k'' \,.\, GG'' + k''' \,.\, GG''' = k \;.$$

Moltiplichiamo queste uguaglianze ordinatamente per α_1, α_2, α_3, . . . $-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ . . .) e sommiamo i risultati; tenuto conto delle eguaglianze già stabilite, si avrà

$$k'''\left\{\alpha_1 . A_1A_1''' + \alpha_2 . A_2A_2''' + \alpha_3 . A_3A_3''' + \ldots - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots)\, GG'''\right\} = 0.$$

ossia

$$\alpha_1 . A_1A_1''' + \alpha_2 . A_2A_2''' + \alpha_3 . A_3A_3''' + \ldots = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots)\, GG''' .$$

Vale a dire: se si projettano i punti A_1, A_2, A_3, . . . , G su di una retta qualsivoglia, con raggi paralleli ad una direzione fissata ad arbitrio, il prodotto del raggio projettante G moltiplicato per $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, . . . è uguale alla somma dei prodotti de' raggi projettanti A_1, A_2, A_3, . . . rispettivamente moltiplicati per α_1, α_2, α_3, . . .

Al punto G, così definito, si dà il nome di baricentro de' punti A_1, A_2, A_3, . . . ai quali siano applicati i numeri o i segmenti paralleli α_1, α_2, α_3, . . .

Il baricentro non muta se ai coefficienti α_1, α_2, α_3, . . . , si sostituiscono altri coefficienti ad essi proporzionali; infatti con ciò non si alterano i rapporti di α_1, α_2, α_3, . . . , ad $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ . . .

118. Se i punti A_1, A_2, A_3, . . . e G si projettano in A_1', A_2', A_3', . . . , G' su di una retta p', mediante raggi paralleli ad un'altra retta p'', indicato con O' un punto qualunque di p', si avrà identicamente

$$\alpha_1 \,.\, O'A_1' + \alpha_2 \,.\, O'A_2' + \alpha_3 \,.\, O'A_3' + \ldots = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots)\, O'G' .$$

Infatti, se si fa passare la retta p'' per O' e si projettano i

punti A_1, A_2, A_3, . . . , G in A_1'', A_2'', A_3'', . . . , G'' su p'', mediante raggi paralleli a p', si avrà evidentemente

$$A_1A_1''=A_1'O',\ A_2A_2''=A_2'O',\ A_3A_3''=A_3'O',\ \ldots,\ GG''=G'O';$$

Ma pel teorema che precede si ha

$$\alpha_1 . A_1A_1''+\alpha_2 . A_2A_2''+\alpha_3 . A_3A_3''+\ldots=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \ldots)\, GG'',$$

dunque ecc.

119. Se O è un punto arbitrario, la risultante dei segmenti $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2$, $\alpha_3 . OA_3$, . . . sarà $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots)\, OG$.

Per segmento $\alpha . OA$ intendiamo un segmento parallelo ad OA, diretto nel senso di OA o nel senso contrario, secondochè α sia positivo o negativo, e la cui grandezza sia OA moltiplicato pel rapporto $\alpha:1$. — Pel punto O si conduca una retta p' e su di essa si projettino i punti A_1, A_2, A_3, . . . , G in A_1', A_2', A_3', . . . , G' mediante raggi paralleli. Il segmento OA è la risultante de'segmenti OA', $A'A$; epperò, ampliando questi segmenti nel rapporto $\alpha:1$, sarà $\alpha . OA$ la risultante di $\alpha . OA'$, $\alpha . A'A$. Ne segue che la risultante de' segmenti $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2$, $\alpha_3 . OA_3$, . . . si potrà ottenere componendo tutti insieme i segmenti $\alpha_1 . OA_1'$, $\alpha_2 . OA_2'$, $\alpha_3 . OA_3'$, . . . , ed i segmenti $\alpha_1 . A_1'A_1$, $\alpha_2 . A_2'A_2$, $\alpha_3 . A_3'A_3$, . . . Ma la risultante (ossia la somma) di $\alpha_1 . OA_1'$, $\alpha_2 . OA_2'$, $\alpha_3 . OA_3'$, . . . , è $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \ldots)\, OG'$; e la risultante (ossia la somma) di $\alpha_1 . A_1'A_1$, $\alpha_2 . A_2'A_2$, $\alpha_3 . A_3'A_3$, ... è $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots)G'G$; dunque la risultante de' segmenti $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2$, $\alpha_3 . OA_3$, . . . si può comporre coi due soli segmenti $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \ldots)\, OG'$, $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \ldots)\, G'G$, epperò coincide col segmento

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \ldots)\, OG.$$

120. Di qui segue che, dati i punti A_1, A_2, A_3, . . . (fig. 103) coi coefficienti (numeri o segmenti paralleli) α_1, α_2, α_3 . . . , per trovare il punto G, si potranno costruire, a partire da due origini differenti O, O', due circuiti, il primo de' quali abbia i lati equipollenti ad $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2$, $\alpha_3 . OA_3$, . . . , ed il secondo ad $\alpha_1 . O'A_1$, $\alpha_2 . O'A_2$, $\alpha_3 . O'A_3$, . . . Le rette OR, $O'R'$, che chiudono rispettivamente i due circuiti si segheranno nel punto cercato G, e sarà

$$OR=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\ldots)\, OG,$$
$$O'R'=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\ldots)\, O'G \quad (*).$$

(*) GRASSMANN, *l. c.*, p. 142.

Se le α sono segmenti, i prodotti $\alpha . OA$ saranno aree, che bisognerà ridurre ad una base comune h (N. 92). Supposto che siasi ottenuto $\alpha_1 . OA_1 = h . a_1$, $\alpha_2 . OA_2 = h . a_2$, $\alpha_3 . OA_3 = h . a_3$, ..., si potranno fare i lati del primo circuito uguali alle lunghezze a_1, a_2, a_3, ... e detta OR la retta di chiusa, sarà $h . OR = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ...) OG$. Ne segue che, anche senza costruire un secondo circuito, si trova G prendendo sulla retta di chiusa il segmento

$$OG = \frac{h . OR}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots} .$$

Se le α fossero aree, si comincerà dal ridurle ad una base comune k:

$$\alpha_1 = k\alpha_1', \ \alpha_2 = k\alpha_2', \ \alpha_3 = k\alpha_3', \ \ldots ;$$

indi si ridurranno i prodotti $\alpha_1' . OA_1$, $\alpha_2' . OA_2$, $\alpha_3' . OA_3$, ... alla base h:

$$\alpha_1' . OA_1 = ha_1 , \ \alpha_2' . OA_2 = ha_2 , \ \alpha_3' . OA_3 = ha_3 , \ \ldots$$

onde

$$\alpha_1 . OA_1 = hka_1 , \ \alpha_2 . OA_2 = hka_2 , \ \alpha_3 . OA_3 = hka_3 , \ \ldots$$

e costruito il circuito coi lati a_1, a_2, a_3, ..., sarà

$$OG = \frac{hk . OR}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots} = \frac{h . OR}{\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' + \ldots} .$$

121. Se H è il baricentro dei punti $\alpha_1 . A_1$, $\alpha_2 . A_2$, ... e se K è il baricentro dei punti $\beta_1 . B_1$, $\beta_2 . B_2$, ..., il baricentro di tutti i punti dati $\alpha_1 A_1$, $\alpha_2 A_2$, ..., $\beta_1 . B_1$, $\beta_2 . B_2$, ..., coinciderà col baricentro G dei due punti $m . H$, $n . K$, dove $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$, $n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots$

Infatti, preso un polo arbitrario O, se si compone la $m . OH$, risultante delle $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2$, ... colla $n . OK$ risultante delle $\beta_1 . OB_1$, $\beta_2 . OB_2$, ..., si ha che la $(m+n)\, OG$, risultante delle $m . OH$, $n . OK$ è anche la risultante di tutti i segmenti $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2$, ..., $\beta_1 . OB_1$, $\beta_2 . OB_2$ ...

122. Se i punti A_1, A_2, A_3, ..., sono in linea retta, nella medesima retta giace anche il loro baricentro G. Ciò si rende manifesto, assumendo un polo O nella retta $A_1A_2A_3$ ...; i segmenti $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2$, $\alpha_3 . OA_3$ ... cadono tutti in questa retta, epperò ivi cadrà anche la loro risultante $m . OG$.

I punti siano due soli A_1, A_2 (fig. 104, dove i segmenti α_1, α_2 sono indicati semplicemente coi numeri 1, 2) coi coefficienti α_1, α_2; il loro baricentro G sarà un punto della retta A_1A_2. Siccome è nulla la risultante delle rette $\alpha_1 . GA_1$, $\alpha_2 . GA_2$, così si ha

$$\alpha_1 . GA_1 + \alpha_2 . GA_2 = 0$$

ossia $$A_1G : GA_2 = \alpha_2 : \alpha_1 ,$$

ed anche $$A_1G : GA_2 : A_1A_2 = \alpha_2 : \alpha_1 : \alpha_1 + \alpha_2 ,$$

vale a dire, il punto G divide il segmento A_1A_2 in parti inversamente proporzionali ai numeri α_1, α_2, ed è un punto interno o un punto esterno al detto segmento secondo che α_1 e α_2 sono dello stesso segno o di segno contrario.

Se $\alpha_1 = \alpha_2$, si ha $A_1G = GA_2$, cioè G sarà il punto di mezzo di A_1A_2.

Se $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, dalle $A_1G : A_1A_2 = \alpha_2 : \alpha_1 + \alpha_2$ si ha $A_1G = \infty$, cioè G è il punto all'infinito della retta A_1A_2.

123 I punti dati siano tre soli, A_1, A_2, A_3, e non in linea retta (fig. 105); α_1, α_2, α_3 i loro coefficienti, la cui somma non sia zero. Il baricentro de' punti $\alpha_2 . A_2$, $\alpha_3 . A_3$ è un punto B_1 della retta A_2A_3, e il baricentro de' tre punti dati $\alpha_1 . A_1$, $\alpha_2 . A_2$, $\alpha_3 . A_3$ sarà il baricentro de' punti $\alpha_1 . A_1$, $(\alpha_2 + \alpha_3) . B_1$, cioè quel punto G della A_1B_1 che è dato dalla relazione

$$GB_1 : A_1B_1 = \alpha_1 : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 .$$

Ora i due triangoli $A_1A_2A_3$, GA_2A_3 sono proporzionali alle altezze, epperò anche alle distanze oblique A_1B_1, GB_1 de' vertici dalla base comune A_2A_3; dunque

$$GA_2A_3 : A_1A_2A_3 = \alpha_1 : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 .$$

Similmente si dimostra

$$GA_3A_1 : A_2A_3A_1 = \alpha_2 : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 ,$$

$$GA_1A_2 : A_3A_1A_2 = \alpha_3 : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 ,$$

dunque $$GA_2A_3 : GA_3A_1 : GA_1A_2 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 ,$$

vale a dire: il baricentro G di tre punti $\alpha_1 . A_1$, $\alpha_2 . A_2$, $\alpha_3 . A_3$ divide l'area $A_1A_2A_3$ in tre triangoli GA_2A_3, GA_3A_1, GA_1A_2 che sono proporzionali ai coefficienti α_1, α_2, α_3.

124. Se G è il baricentro de' punti $\alpha_1 . A_1$, $\alpha_2 . A_2$, $\alpha_3 . A_3, \ldots$ e se O è un punto qualunque, abbiamo veduto che la risultante OR de' segmenti $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2$, $\alpha_3 . OA_3, \ldots$ è data dall'eguaglianza

$$OR = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ \ldots \ ) \, OG ,$$

donde si ha
$$OG = \frac{OR}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots}$$

Se $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = 0$, senza che sia nullo OR, sarà $OG = \infty$.

Se è $OR = 0$, preso un altro punto O', la risultante delle $\alpha_1 . O'A_1$, $\alpha_2 . O'A_2$, $\alpha_3 . O'A_3, \ldots$ sarebbe uguale ad $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) \, O'G$, cioè nulla, perchè $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = 0$.

Dunque, se $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = 0$, la risultante OR o è nulla per tutt'i punti O, o non è tale per alcuno. Nel secondo caso, si ha un baricentro G situato a distanza infinita sulla retta ... OR ... In questo medesimo caso, sia A_0 il baricentro de' punti $\alpha_1 . A_1$, $\alpha_2 . A_2 , \ldots , \alpha_{n-1} . A_{n-1}$; qualunque sia il polo O, sarà

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}) OA_0 \ ,$$

vale a dire $-\alpha_n . OA_0$ la risultante di $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2 , \ldots ,$ $\alpha_{n-1} . OA_{n-1}$ (N. 119). Sia OH la risultante di $-\alpha_n . OA_0$ e $\alpha_n . OA_n$; questa risultante sarà equipollente ad $\alpha_n . A_0 A_n$, cioè indipendente da O. Per conseguenza: la risultante di $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2, \ldots,$ $\alpha_n . OA_n$, dove $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$, ha non solo la direzione ma eziandio la grandezza costante (qualunque sia il polo O), ed è equipollente ad $\alpha_n . A_0 A_n$, dove A_n è uno qualunque de' punti dati, ed A_0 è il baricentro de' rimanenti (affetti dai rispettivi coefficienti).

Nel primo caso, siccome riesce $OG = \frac{0}{0}$, così il sistema de' punti dati non ha un baricentro determinato: allora, posto il polo O in uno de' punti dati, p. e., in A_1, siccome per un punto qualunque O è nulla la risultante de' segmenti $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2$, $\alpha_3 . OA_3, \ldots,$ così sarà nulla la risultante di $\alpha_2 . A_1 A_2$, $\alpha_3 . A_1 A_3, \ldots$, cioè, essendo $\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = -\alpha_1$ diverso da zero, sarà A_1 il baricentro dei punti A_2 , $A_3 , \ldots\ldots$

125. Pei punti A_1, A_2, $A_3, \ldots$, e pel loro baricentro G si conducano segmenti $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3, \ldots$, GH paralleli fra loro (in una direzione arbitraria) e proporzionali ai coefficienti α_1 , α_2, α_3, $\ldots$, $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$, con riguardo ai segni: cioè, fissato il senso de' segmenti positivi, da quella parte si tirino i segmenti proporzionali ai coefficienti positivi, e dalla parte opposta i segmenti

proporzionali ai coefficienti negativi. Sia O un punto arbitrario, pel quale si conduca una retta parallela ai segmenti AB, e su di questa si projettino con raggi paralleli i punti $A_1, A_2, A_3, \ldots, G$ in A_1', A_2', A_3', ..., G'. Pel teorema del N. 116 sarà

$$\alpha_1 . A_1A_1' + \alpha_2 . A_2A_2' + \alpha_3 . A_3A_3' + \ldots = m . GG'.$$

Ma i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots m$ sono proporzionali alle basi dei triangoli OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, ..., OGH, ed i segmenti A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', ..., GG' sono proporzionali alle altezze dei triangoli medesimi; dunque la somma dei triangoli che da O projettano i segmenti A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., è uguale al triangolo che dallo stesso polo O projetta GH. Donde segue (N. 44) che GH è la risultante delle A_1B_1, A_2B_2 A_3B_3, ...

126. Di qui si conclude un'altra costruzione del baricentro G. Condotti per A_1, A_2, A_3, ... (fig. 106) i segmenti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, in una direzione fissata ad arbitrio, si faccia la composizione nel modo che si è detto al N. 50. Si otterrà così una retta r, alla quale deve appartenere il segmento risultante, retta che perciò deve passare per G. Ora si ripeta la composizione, mutando soltanto la direzione comune de' segmenti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$; si avrà un'altra retta r', ed il punto comune alle r, r' sarà il domandato baricentro (*).

127. Per baricentro di una linea o di un'area s'intende il baricentro di tutti i punti della linea o dell'area, ai quali siano applicati coefficienti tutti uguali.

128. Il baricentro di un segmento rettilineo AB (fig. 107) è il suo punto di mezzo G. Infatti, se X è un punto qualunque del segmento, in questo vi è un altro punto X' tale che G sia il punto di mezzo del segmento XX'; onde il baricentro dei punti X, X' è G. Siccome ogni coppia analoga ad X, X' ha il suo baricentro in G, così il baricentro di tutti i punti di AB coinciderà col baricentro di tanti punti tutti riuniti in G. Vale a dire, G è il baricentro del segmento AB.

129. Il baricentro di un parallelogrammo è il punto d'intersezione delle sue diagonali (fig. 108). Il baricentro di un cerchio o di una circonferenza o di un poligono regolare è il centro della figura. La dimostrazione non differisce affatto da quella che precede.

130. Se una figura ha un asse di simmetria, in quest'asse si troverà il baricentro della figura. Infatti, se X è un punto della

(*) Culmann, *l. c.*, p. 144.

figura, questa avrà un altro punto X' tale che il segmento XX' sia diviso per metà e ad angolo retto dall' asse. Perciò il baricentro de' due punti X, X' è nell'asse; e siccome ciò vale per tutte le coppie analoghe, così ne segue che a tutti i punti della figura si possono sostituire punti situati tutti nell'asse. Il baricentro di questi è nella retta che li contiene, dunque ecc.

Lo stesso ragionamento prova che, se una figura ha un diametro, cioè una retta che divida per metà (anche sotto angolo non retto) tutte le corde parallele ad una certa direzione, il baricentro della figura è situato nel diametro.

Se una figura ha due diametri, il punto ad essi comune è il baricentro.

131. La figura sia un triangolo ABC (fig. 109). Se D è il punto di mezzo di BC, la retta AD è un diametro, giacchè divide pel mezzo tutte le corde parallele a BC. Dunque il baricentro G del triangolo è il punto di concorso de' tre diametri AD, BE, CF. Esso divide ciascuno de' tre diametri in due segmenti, il cui rapporto è $2:1$. Infatti, siccome il triangolo ABD è segato dalla trasversale FGC, così si ha

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DG}{GA}=-1 .$$

Ma $AF=FB$, $BC=2DC$, dunque

$$\frac{DG}{GA}=\frac{1}{2},$$

ossia $GD=\frac{1}{3}AD$, ed analogamente $GE=\frac{1}{3}BE$, $GF=\frac{1}{3}CF$.

Il punto G è anche il baricentro de' punti A, B, C.

132. Se una figura (lineare o superficiale) è un sistema di segmenti rettilinei o di aree triangolari, il baricentro di quella è il baricentro de' punti $\alpha_1.A_1$, $\alpha_2.A_2$, $\alpha_3.A_3$, ..., dove A_1, A_2, A_3 ..., siano i baricentri de' segmenti o de' triangoli, de' quali la figura è composta, ed i coefficienti (numeri o segmenti) α_1, α_2, α_3, ..., siano proporzionali ai segmenti o ai triangoli medesimi.

133. La figura sia un circuito a lati rettilinei. Siano A_1, A_2, A_3... i punti di mezzo de' lati, ed α_1, α_2, α_3 segmenti proporzionali ai lati medesimi. Si trovi con uno dei processi già esposti (N[i] 120, 126) il baricentro G de' punti A_1, A_2, A_3... cui siano applicati i segmenti α_1, α_2, α_3....; sarà G il baricentro del circuito dato.

134. Se il circuito è una porzione del perimetro di un poligono regolare (fig. 110), se ne può assegnare il baricentro in modo più semplice. Condotto un diametro del circolo inscritto, su di esso si projettino ortogonalmente i lati del circuito. Sia σ un lato, λ la sua projezione, r il raggio del circolo, condotto al punto di mezzo di σ, e p la perpendicolare abbassata da questo punto sul diametro. Il triangolo rettangolo che ha σ per ipotenusa e λ per cateto è simile a quello pel quale r è l'ipotenusa e p un cateto; perciò

$$\frac{\lambda}{p}=\frac{\sigma}{r}, \quad \text{ossia} \quad \lambda r = p\sigma.$$

Scrivansi le analoghe uguaglianze relative a tutt' i lati del circuito, e somminsi i membri corrispondenti, avremo

$$rl = p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + \ldots$$

dove l sia la projezione dell'intero circuito.

Sia G il baricentro, y la perpendicolare abbassata da G sul diametro; essendo G il baricentro dei punti medi dei lati, ai quali siano rispettivamente applicati i coefficenti $\sigma_1, \sigma_2 \ldots$, sarà

$$p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + \ldots = ys,$$

indicando con s la lunghezza del circuito. Dunque

$$rl = ys, \quad \text{ossia} \quad y = \frac{rl}{s}.$$

Quest'uguaglianza fa conoscere a qual distanza dal diametro sia il punto G; il quale poi dovrà anche trovarsi su quel raggio OC del cerchio che divide per metà il circuito, giacchè questo raggio è un asse di simmetria pel circuito medesimo. Conducasi una retta $EF = s$, che abbia un estremo E nel diametro, e l'altro estremo F nella tangente DF del circolo che è parallela al diametro medesimo; indi su EF prendasi il segmento $EH = l$ e per H tirisi la parallela a DF sino a segare in G l'asse di simmetria CO. La retta EF segata dalle parallele EO, HG, DF dà

$$\frac{EF}{EH}=\frac{\text{distanza delle } EO,\ DF}{\text{distanza delle } EO,\ HG}, \quad \text{ossia} \quad \frac{s}{l}=\frac{r}{\text{distanza di } G \text{ da } EO}=\frac{r}{y},$$

dunque G è il baricentro cercato. Nella formola sopra ottenuta, notisi bene che l è la projezione della spezzata sopra un diametro arbitrariamente scelto, ed y è la distanza normale di G da

questo diametro. Ovvero: sulla taugente CM, che è perpendicolare all'asse di simmetria OC, prendasi un segmento $CM=\frac{1}{2}s$, congiunganst O, M; e da quell'estremo A del circuito dato che con M è situato dalla stessa parte dell'asse di simmetria, tirisi la parallela ad OC sino ad incontrare OM in N; e da N si guidi la parallela a CM, la quale segherà OC in G. Infatti ne' triangoli simili OCM, OGN, le basi CM, GN sono $\frac{1}{2}s$, $\frac{1}{2}l$, intendendo con l la projezione della spezzata sul diametro perpendicolare ad OC; l'altezza del primo è r, dunque l'altezza del secondo sarà la distanza di G dal centro O (*).

135. Questa costruzione è praticabile anche quando il poligono regolare, al cui perimetro appartiene il circuito dato, abbia un infinito numero di lati, ossia non differisca dal cerchio. La linea data sia dunque un arco AB d'un cerchio di centro O (fig. 111); s sia la lunghezza dell'arco, la metà del quale sia sviluppata in CM sulla tangente media; projettando l'estremo A in N sulla OM mediante una parallela all'asse di simmetria OC, e conducendo per N la parallela ad MC sino a segare OC in G, sarà G il baricentro dell'arco AB. Infatti

$$CM : CO = GN : GO \;,$$

$$CM = \tfrac{1}{2}s,\; GN = \tfrac{1}{2}l,\; CO = r \;,$$

dunque

$$GO = y \; (^{**}).$$

136. Se il circuito dato è il perimetro di un triangolo ABC (fig. 112), il baricentro G è il centro del cerchio inscritto nel triangolo DEF, i cui vertici sono i punti di mezzo dei lati del triangolo dato. Infatti, D, E, F sono i baricentri de' segmenti rettilinei BC, CA, AB; dunque G sarà il baricentro de' punti $\alpha.D$, $\beta.E$, $\gamma.F$, dove $\alpha:\beta:\gamma = BC:CA:AB$. Il baricentro A' de' punti $\beta.E$, $\gamma.F$ dividerà il segmento EF in due segmenti EA', $A'F$ in modo che $EA':A'F = \gamma:\beta = AB:CA = \frac{1}{2}AB:\frac{1}{2}CA = ED:DF$. Dunque DA' è la bissettrice dell'angolo EDF; epperò G, che dev'essere il baricentro de' punti $\alpha.D$, $(\beta+\gamma)A'$, giace nella bissettrice (interna) dell'angolo D del triangolo DEF. Analogamente G, dovrà essere situato nelle bissettrici EB', FC' degli altri due angoli; dunque G è il centro del cerchio inscritto nel triangolo DEF; c. d. d.

137. La figura data sia il quadrilatero $ABCD$ (fig. 113, 114, 115), che si può considerare come somma (algebrica) de' due triangoli

(*) Culmann, *l. c.*, p. 147.
(**) *Ibid.*, p. 148.

ABD, CDB, ne' quali è diviso dalla diagonale BD. Sia E il punto medio di BD; i baricentri G_1, G_2 de' due triangoli sono situati rispettivamente nelle rette AE, CE, in modo che $G_1E = \frac{1}{3}AE$, $G_2E = \frac{1}{3}CE$. Il baricentro G del quadrilatero sarà dunque il baricentro de' due punti $\alpha_1 . G_1$, $\alpha_2 . G_2$, dove $\alpha_1 : \alpha_2 = ABD : CDB = AF : FC$, indicata con F l'intersezione delle due diagonali BD, AC. Siccome la G_1G_2 divide in parti proporzionali due lati del triangolo AEC, così sarà parallela al terzo lato AC; donde segue che la retta EG dividerà nello stesso rapporto $G_1G : GG_2 = \alpha_2 : \alpha_1 = FC : AF$ la G_1G_2 e la AC. Per dividere AC nel rapporto $FC : AF$, basta scambiare fra loro di posto i segmenti AF, FC, cioè fare $AH = FC$, onde sarà $HC = AF$. La congiungente EH incontrerà adunque G_1G_2 nel punto cercato G.

Le parallele G_1G_2, AC dividono in parti proporzionali le EA, EC, EH; dunque, come $G_1E = \frac{1}{3}AE$ e $G_2E = \frac{1}{3}CE$, così $GE = \frac{1}{3}HE$.

Se si adopera ora invece di BD, la diagonale AC, il cui punto medio sia K, fatto in BD lo scambio de' segmenti BF, FD (cioè preso $BL = FD$, onde $LD = BF$), il punto G sarà anche situato nella LK, in modo che $GK = \frac{1}{3}LK$.

Ma E punto di mezzo di BD è anche il punto di mezzo di FL, e così K è il punto di mezzo di FH; dunque G è il baricentro del triangolo FLH, ossia:

Il baricentro di un quadrilatero coincide col baricentro del triangolo i cui vertici sono il punto comune alle diagonali e i punti che nascono dallo scambio de' segmenti in ciascuna diagonale.

Da ciò segue che la retta FG passerà pel punto J di mezzo di HL (*).

138. Se AD, BC sono parallele (fig. 116, 117), e se pei baricentri dei triangoli BCD, ABD si conducono le parallele ad AD, queste divideranno in tre uguali segmenti la MN che unisce i punti di mezzo delle AD, BC. Siccome la retta MN contiene i punti di mezzo di tutte le corde parallele ad AD, onde è un diametro della figura, così il baricentro G giacerà in essa e ne dividerà il segmento medio in due parti reciprocamente proporzionali alle aree dei detti triangoli, cioè alle basi BC, AD. Le parti del segmento medio, avendo la somma $\frac{1}{3}MN$ ed il rapporto $AD : BC$, saranno rispettivamente uguali ad

(*) Culmann, *l. c.*, p. 152. — Cfr. *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 6 (London, 1864), p. 127.

$$\frac{MN.AD}{3(AD+BC)}, \quad \frac{MN.BC}{3(AD+BC)},$$

quindi sarà $MG = \frac{1}{3}MN + \frac{MN.AD}{3(AD+BC)} = \frac{MN(BC+2AD)}{3(AD+BC)}$,

$$GN = \frac{1}{3}MN + \frac{MN.BC}{3(AD+BC)} = \frac{MN(AD+2BC)}{3(AD+BC)},$$

donde $MG:GN = BC+2AD:AD+2BC$. Ogni retta passante per G e compresa fra le parallele AD, BC sarà perciò divisa in G in due parti proporzionali a $BC+2AD$, $AD+2BC$. Da ciò segue che se nella BC si fa $CP=AD$ e se nella AD si fa $AQ=CB$, la retta PQ sarà divisa da MN in due segmenti proporzionali ad MP, QN; ma $MP=\frac{1}{2}BC+AD$, $QN=BC+\frac{1}{2}AD$, onde

$$MP:QN = BC+2AD:AD+2BC;$$

perciò PQ passa per G. Siccome le BP, QD sono uguali e parallele, così le PQ, BD si tagliano fra loro per metà; dunque PQ passa per E punto di mezzo di BD, vale a dire PQ coincide con HE. Inoltre, se in AD si fa $DS=CB$, $AA'=\frac{1}{3}AS$, e se in BC si fa $CC'=AA'$, siccome

$$A'N = AN - AA' = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{3}(AD-BC) = \frac{1}{6}(AD+2BC),$$

e $MC' = MC + CC' = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{3}(AD-BC) = \frac{1}{6}(BC+2AD)$,

onde $\quad A'N:MC' = AD+2BC:BC+2AD$,

così $A'C'$ passerà per G.

Di qui si cavano due semplici costruzioni del baricentro di un quadrilatero con due lati paralleli (trapezio): o come intersezione della MN colla PQ; o come intersezione della MN colla $A'C'$ (*).

139. La costruzione suesposta pel baricentro di un quadrilatero è in difetto nel caso in cui le diagonali AC, BD siano parallele (fig. 118). Ma in tal caso i triangoli ABD, BCD sono equivalenti e di segno opposto, perciò $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Ne segue che l'area

(*) Culmann, *l. c.*, p. 150. — Walker, *On an easy construction of the centre of gravity of the trapezium* (Quarterly Journal of Matematics, vol. 9, London, 1868), p. 339.

della figura è zero (N. 95) e il baricentro cade all'infinito, nella direzione comune alle AC, BD.

140. Ora si domandi il baricentro di una figura rettilinea qualsivoglia. L'area di questa figura si potrà considerare come somma (algebrica) de' triangoli che da un punto arbitrario O projettano i lati del circuito. Trovati i baricentri A_1, A_2, A_3, ... di questi triangoli, e ridotte le aree de' medesimi ad una base costante, sicchè risultino proporzionali ai segmenti α_1, α_2, α_3 ..., il punto cercato sarà il baricentro de' punti $\alpha_1 . A_1$, $\alpha_2 . A_2$, $\alpha_3 . A_3$ ..., baricentro che si sa costruire coll'uno o coll'altro de' due metodi già esposti.

Se il polo O è affatto arbitrario, il numero de' triangoli sarà uguale a quello de' lati del circuito; ma se O si prende sopra un lato o nel punto comune a due lati, il numero de' triangoli diminuirà di una, due unità rispettivamente.

Invece di considerare la figura proposta come somma di triangoli, si potrà anche riguardarla come aggregato di quadrilateri e di triangoli, ne' quali si possa decomporla per mezzo di rette opportunamente tracciate.

141. Esempi. La figura data sia l'esagono intrecciato $ABCDEF$ (fig. 119), che è la somma de' triangoli OBC, OCD, ODE, OFA, essendo O il punto comune ai lati AB, EF. Di quei quattro triangoli, il primo e l'ultimo sono positivi, gli altri due negativi. Trovinsi i loro baricentri G_1, G_2, G_3, G_4, e, ridotte le aree de' triangoli medesimi ad una base comune, riescano esse proporzionali ai segmenti α_1, α_2, α_3, α_4. Come i triangoli, così i segmenti α sono, positivi il primo e l'ultimo, negativi il secondo e il terzo. Se ora vogliamo applicare il metodo del N. 120, dovremo ancora ridurre ad una base comune h i quattro prodotti $\alpha_r . OG_r$. Nella figura si è condotto per O una retta arbitraria x; fissato in essa il senso positivo, si sono portati nella medesima i segmenti h, α_1, α_2, α_3, α_4 (*) coll'origine comune O (h, α_1, α_4 in un senso; α_2, α_3 nel senso contrario); e, congiunto l'estremo di h con G_r, si è tirata dal termine di α_r la parallela alla congiungente, sino ad incontrare OG_r in H_r. Così si è ottenuto $OG_r : h = OH_r : \alpha_r$, epperò $\alpha_r . OG_r = h . OH_r$. Indi, a partire da O, s'è costruito un circuito coi lati equipollenti ad OH_1, OH_2,

(*) Nella fig. 119, i termini dei segmenti h, α sono appunto indicati con queste lettere h, α. Alcune delle rette nominate nel testo non sono tracciate nella figura.

OH_3, OH_4; la retta di chiusa è OR. Finalmente, per costruire il punto G, che è dato dalla relazione

$$OG = \frac{h.OR}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4},$$

si è preso in Ox, coll'origine O, il segmento $OS = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, congiuntone l'estremo con R, si è tirata dal termine di h la parallela alla congiungente, sino a intersecare OR in G.

142. La figura sia la sezione di un così detto ferro ad angolo (fig. 120); essa è stata divisa in sei parti, quattro trapezi, un triangolo ed un rettangolo, indicate coi numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6. Di queste sei parti si sono costruiti i baricentri, e ridotte le aree ad una base comune, determinando i segmenti proporzionali 1, 2, ... 6, che sono poi stati riportati successivamente sopra una retta zz. Da un punto U, scelto ad arbitrio, si sono condotti i raggi ai punti della zz, che sono origini e termini de' segmenti; pei baricentri delle sei figure componenti si sono condotte le parallele alla zz, e poi si è costruito un poligono coi vertici situati in queste parallele, e coi lati ordinatamente paralleli ai raggi che escono da U. I lati estremi di questo poligono si segano in un punto, pel quale s' è condotta la parallela a zz; e questa retta dee contenere il baricentro domandato. Per ottenere una seconda retta che possieda la stessa proprietà, si ripeteranno le operazioni anzidette rispetto ad un'altra direzione della zz; ovvero, come s' è fatto nella nostra figura, mantenuta la zz e il punto U, si costruirà un nuovo poligono i cui vertici cadano sulle rette menate pei baricentri 1, 2, ... 6 perpendicolarmente a zz, ed i cui lati siano perpendicolari ai corrispondenti raggi per U. È chiaro che ciò equivale a condurre una nuova zz perpendicolare alla prima, e quindi a procedere rispetto ad essa, come dianzi s'era fatto per la medesima prima zz. S' intende da sè che nella zz i segmenti 1, 2, ... devono essere portati con riguardo al senso, nel caso che le aree in cui è stata divisa la figura data non siano tutte dello stesso segno (*).

143. Nella costruzione che precede, s' è fatto uso di due poligoni, a fine di ottenere due rette passanti pel baricentro che si cerca. Ma basterà un solo poligono, ogniqualvolta sia già conosciuta a priori una retta nella quale debba trovarsi il baricentro, p. e. quando

(*) Culmann, *l. c.*, p. 198.

la figura abbia un diametro. Questo caso si verifica nell'esempio che segue, dove la figura proposta è dotata di un asse di simmetria (fig. 121).

Questa figura rappresenta la sezione di un così detto ferro a doppio T.

144. Passiamo ora ai baricentri delle figure curvilinee, e dapprima consideriamo un settore circolare OAB (fig. 122). Imaginiamolo diviso in un grandissimo numero di settori elementari concentrici, i quali, riguardati come triangoli, avranno i loro baricentri nell'arco descritto con raggio $OA' = \frac{2}{3} OA$; perciò il baricentro cercato sarà il baricentro G dell'arco $A'B'$. Per trovare questo punto (N. 135), si sviluppi il semiarco CA sulla tangente CM, congiungansi O, M e tirisi $A'N$ parallela ad OC, sino ad incontrare OM in N. Allora il punto G sarà il piede della perpendicolare abbassata da N sul raggio medio OC (*).

145. Abbiasi ora il segmento circolare ACB (fig. 123); esso è la differenza fra il settore OAB e il triangolo OAB, ossia la somma del settore OAB e del triangolo OBA; epperò il baricentro G del segmento sarà nella retta (nel raggio medio OC) che congiunge i baricentri G_1, G_2 del settore e del triangolo, e dividerà il segmento G_1G_2 in due parti inversamente proporzionali alle aree di queste figure. Preso $OA' = \frac{2}{3} OA$, ed ottenuto il punto N come dianzi si è detto, i punti G_1, G_2 saranno i piedi delle perpendicolari abbassate da A', N sul raggio medio OC. Sia F il punto comune alle AB, OC, ed H il piede della perpendicolare abbassata da F su OA. Le aree del settore e del triangolo sono uguali rispettivamente a $CM.OA$, $FH.OA$, vàle a dire, sono proporzionali alle lunghezze CM, FH; perciò se da G_1, G_2 si conducono due segmenti G_1I, G_2K, paralleli e nello stesso senso, uguali o proporzionali ad FH, CM, il punto G comune alle KI, OC sarà il baricentro domandato. Infatti, dai triangoli simili GG_1I, GG_2K si ha

$$G_1G : G_2G = G_1I : G_2K = FH : CM \quad (^{**}).$$

146. Se il circuito di una figura, della quale si cerchi il baricentro, è composto di segmenti rettilinei e di archi circolari, tracciando le corde di questi archi o i loro raggi estremi, si decomporrà la figura in parti, per ciascuna delle quali si sanno determinare il baricentro e l'area; quindi si potrà applicare il processo del N. 142.

(*) Culmann, *l. c.*, p. 153.
(**) Culmann, *l. c.*, p. 154.

Esempio. Si domanda il baricentro della figura già trattata al N. 103 (fig. 124). A tale uopo consideriamola dapprima decomposta in tre parti, la lunula, la corona e la somma delle parti rettilinee; poi riguardando la lunula come somma (algebrica) di due settori e di un quadrilatero, la corona come somma (algebrica) di due settori, e dividendo la parte rettilinea per mezzo della retta $KCC'K'$, verremo ad ottenere la figura proposta uguale alla somma delle figure parziali:

1... Settore $UAEA'$
2... Quadrilatero $OAUA'$
3... Settore $AOA'F$
4... Settore OBB'
5... Settore $OC'C$
6... Trapezi $BCKH + H'K'C'B'$
7... Trapezi $CJIK + K'I'J'C'$,

delle quali tutte si sanno determinare le aree, riducendole ad una base comune, e costruire i baricentri. Per trovare il baricentro della somma $BCKH + H'K'C'B'$, basterà cercare (N. 138) il baricentro del trapezio $BCKH$ e per esso condurre la parallela a KC sino ad incontrare l'asse di simmetria EO: il punto d'incontro sarà il baricentro desiderato. Allora, per applicare il processo del N. 142, si condurrà, in una direzione diversa da quella di EO, per es. nella direzione di $KCC'K'$, una retta zz, sulla quale si porteranno consecutivamente i segmenti 1, 2, 3, ... 7 proporzionali alle aree delle sette figure parziali, badando che i segmenti 3 e 5 devono essere diretti in senso opposto agli altri, perchè rappresentano aree negative. Da un punto V, scelto ad arbitrio fuori della zz, si condurranno i raggi ai punti che sono origini ed estremi de' predetti segmenti. Poi, tirate pei baricentri delle figure parziali le parallele alla zz, si costruirà un poligono i cui vertici cadano in coteste parallele ed i cui lati siano ordinatamente paralleli ai raggi uscenti dal polo V. Pel punto in cui si segano il primo e l'ultimo lato si tiri la parallela alla zz; essa segherà l'asse OU nel baricentro cercato G della figura data. Questo punto G, nel nostro disegno, viene a coincidere assai prossimamente col punto 2, baricentro del quadrilatero $OAUA'$. Se si prolungassero opportunamente i lati del poligono sino a trovare il punto in cui il primo lato incontra il quarto, e quello in cui il quarto lato incontra il sesto, e se per questi punti si tracciassero le parallele a zz sino ad incontrare l'asse di simmetria: nelle intersezioni avremmo i baricentri della lunula e della corona.

IX.

Rettificazione di un arco circolare.

147. Per sviluppare un arco circolare AB sulla tangente in A (fig. 125), si può procedere così. Si prolunghi BA di una parte $AC=\frac{1}{2}BA$, e dal centro C col raggio CB si descriva un arco che tagli la tangente in D. Allora sarà AD la lunghezza dell'arco dato, con un errore in meno, il cui rapporto all'arco è

$$-\frac{\theta^4}{1080}-\frac{\theta^6}{54432}\cdots,$$

essendo θ il rapporto dell'arco al raggio (*).

Ovvero (fig. 126): Sia D il punto di mezzo dell'arco AB, ed E il punto di mezzo dell'arco AD; il raggio OE incontri in C la tangente in A, e si tiri la CB; sarà $AC+CB$ la lunghezza dell'arco dato, con un errore in più, il cui rapporto all'arco è

$$+\frac{\theta^4}{4320}+\frac{101\,\theta^6}{3483648}\cdots$$

Siccome $4320=4\times1080$, così se ai $\frac{4}{5}$ della lunghezza trovata colla seconda costruzione si aggiunge $\frac{1}{5}$ della lunghezza trovata colla prima, si avrà nella somma risultante una lunghezza approssimata dell'arco, con un errore in più, il cui rapporto all'arco sarà

$$+\frac{17\,\theta^6}{870912}\cdots \qquad (^{**}).$$

Per la dimostrazione di queste regole rimandiamo lo studioso alle note originali del prof. Rankine, citate a piè di pagina.

148. Intorno a questo soggetto credo conveniente di riprodurre qui una lettera che mi fu diretta dall'egregio mio amico, prof. A. Sayno.

« Il metodo dato da Culmann (***) per sviluppare un arco di cerchio AB sulla tangente in un suo punto è troppo lungo. Io credo di poter ottenere graficamente la lunghezza di un arco di cerchio in un modo più semplice, ricorrendo a curve ausiliarie, le quali, una volta costruite, possono servire in ogni caso.

» Si immagini (fig. 127) un giro $OMRS$ di *spirale d'Archimede* riferita all'asse polare OX col polo in O, che ha per equazione $\rho=a\omega$ (****); e il circolo di centro O e di raggio $OA'=a$. Sia OM un raggio vettore qualunque della spirale, che intersechi il circolo in M'; sarà arco $A'M'=OM$. Se ora si vuole avere la lunghezza di un arco di circolo $A''M''$ di raggio OA'' qualunque, basterà appli-

(*) Rankine, *On the approximate drawing of circular arcs of given lengths* (Philosophical Magazine, ottobre 1867, p. 286).

(**) Rankine, *On the approximate rectification of circular arcs* (Philosophical Magazine, novembre 1867, p. 381).

(***) *L. c.*, p. 37.

(****) ρ è il raggio vettore OM, ed ω la corrispondente anomalia $A'OM$.

carvi la spirale (supposta già levata dalla posizione precedente) in modo che il suo asse polare coincida col raggio OA'' dell'arco dato, e segnare sulla OA'' il punto A' e sull'altro raggio OM'' il punto M in cui quel raggio incontra la curva. Levata via la spirale, se si tira da A'' la parallela alla $A'M$, essa interseca OM'' in M''', ed OM''' è la lunghezza dell'arco cercata. Questa spirale si può costruire con una lastrina di ottone, di talco o di avorio, ed in essa basterà segnare il polo ed il punto A'. Sarebbe un nuovo istrumento da aggiungere al grafometro nella busta dei compassi dell'ingegnere.

La spirale d'Archimede $\rho = a\omega$ (fig. 130) dà anche lo sviluppo di un arco sulla tangente. Descritto il cerchio di raggio $OA = a$ ed il cerchio di diametro $OC = OA$, se B, H sono i punti in cui questi cerchi sono incontrati dal raggio vettore qualsivoglia OM, sarà $OM =$ arco $AB =$ arco OH. Perciò, se si vuole sviluppare l'arco OV sulla tangente OX, basta disporre la spirale in modo che il polo e l'asse polare coincidano rispettivamente col punto di contatto O e colla tangente OX dell'arco dato, e quindi segnare i punti H, M in cui la corda OV incontra il cerchio di diametro OC e la spirale. Tolta via la spirale, se in OX si fa $OM' = OM$, e se da V si tira la VV' parallela ad HM', sarà OV' lo sviluppo cercato.

Per maggiore solidità della lastrina che costituisce l'istrumento, conviene che si adoperi il cerchio di diametro $OC' = CO$, ed allora, supposta prolungata la corda VO, si otterrà $OH' = HO$.

» Un' altra curva che può servire al medesimo scopo è la *spirale iperbolica*, la cui equazione in coordinate polari è $a = \rho\omega$. Si disegni (fig. 128) un giro di questa curva ..$NMDCBA$, e si segni sull'asse polare il punto A' in modo che $OA' = a$; allora l'arco di circolo MM' di raggio OM ha per lunghezza OA'; quindi un arco qualunque $M''M'''$ col centro in O avrà per misura OA'', dove A'' si ottiene tirando $M'''A''$ parallela ad MA'. Questa curva non serve per avere la lunghezza di archi di piccola ampiezza, così che praticamente torna più utile la prima.

La spirale iperbolica dà in un modo assai elegante la divisione degli angoli. Infatti, per ottenere l'arco $M'N' = \frac{1}{n} M'M$ (fig. 128), basta prolungare il raggio vettore OM e prendere $OM'' = n.OM$, e col raggio OM'' intersecare la spirale in N; il raggio ON incontra l'arco $M'M$ nel punto cercato N'.

» Per ottenere l'arco sviluppato sulla tangente, si può ricorrere ad un'altra curva ausiliaria, cioè alla sviluppante di circolo. Si abbia (fig. 129) il cerchio di raggio OA' e sia $A'M'B'C'D'$ la sviluppante del medesimo. Dalla figura si ha: arco $MA' = MM'$, essendo MM' la tangente al cerchio in M. Se allora si domanda l'arco $M''M'''$ (di centro O) sviluppato sulla tangente al medesimo in M'', basterà tirare OM', la quale retta prolungata incontra in M^{IV} quella tangente, e $M''M^{IV}$ è lo sviluppo cercato ».

CORREZIONI

AGLI

ELEMENTI DI GEOMETRIA PROJETTIVA

(Primo Volume)

del Prof.

LUIGI CREMONA.

Il teorema del N. 17 (*pag.* 8) *deve essere enunciato così:*

« Se alle rette a, b, c,... ed ai punti ab, ac,... bc,... di una figura corri-
» spondono ordinatamente le rette a', b', c',... ed i punti $a'b'$, $a'c'$,... $b'c'$,...
» di un' altra figura situata colla prima nello stesso piano, e se le coppie di
» punti corrispondenti ab ed $a'b'$, ac ed $a'c'$,... bc e $b'c'$,... sono allineati
» con un punto fisso O, dico che le rette corrispondenti a ed a', b e b', c e c',...
» si segano in punti di una retta fissa ».

A pag. 4, *linea* 10ª, in luogo di σ bisogna leggere σ'.

A pag. 47, *N.* 70, *alla* 3ª *linea della colonna di destra* bisogna leggere cc' invece di bb', *alla* 5ª bb' in luogo di cc', *alla* 6ª bc' in luogo di $b'c$, e poi b in luogo di b', e *alla* 7ª c' in luogo di c.

A pag. 68, *linea* 7ª, invece di $-\frac{BA'.CB'.AC'}{CA'.AB'.BC'}$ *leggasi* $-\frac{CA'.AB'.BC'}{BA'.CB'.AC'}$.

A pag. 74, *linea* 23, *si legga:*

« .... in A', B',....., P'. I fasci Q (A'. B'. C',.....), P' (A'. B'. C',.....)
» sono projettivi (N. 108), epperò sono projettivi anche i fasci P (A. B. C....),
» P' (A'. B'. C'...); anzi questi sono prospettivi, perchè il raggio $PP'Q$ corri-
» sponde a sè medesimo. Dunque le rette PA e $P'A'$, PB e $P'B'$, PC e $P'C'$,...
» si segano in punti di una retta fissa s. I triangoli PAB e .....»

Ed alla linea 27 *si legga:*

« ..... si segheranno nei punti della retta fissa s. »

Analogamente a pag. 75, *linea* 12, *si legga:*

« ..... in H'', K'',... Le punteggiate ABC..., $A''B''C''$..., sono projettive
» (N. 110), dunque sono projettive anche $A'B'C'$..., $A''B''C''$...; anzi queste
» sono prospettive, perchè Q corrisponde a se medesimo. Dunque le congiun-
» genti $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$,... concorreranno in un punto fisso O. I triangoli...

Ed alla linea 18 *si legga:*

« .... concorreranno nel punto fisso O. »

Pag.	*linea*		*invece di*		*leggasi*
95,	7,		cc'		pp'
» 114	» 29	»	S	»	s
» 116	» 17	»	« il quarto è prospettivo al primo (sezione comune s) il primo »	»	« il primo è prospettivo. »
» 126	» 10	»	$RA.QA' = RB.QB'$	»	$QA.RA' = QB.RB'$
» id.	» 12	»	$RM.QM = RB.QB'$	»	$QM.RM = QB.RB'$
» id.	» 24	»	« per O, U, V »	»	« per O, V, U »
» 154	» 5	(salendo)	$PQ'R'$	»	$OQ'R'$
» 155	» 29	»	incontri	»	incontrino
» 163	» 11	»	(k)	»	(d)
» id.	» 14	»	$\pm OB^2$	»	$\mp OB^2$

» 164 dalla linea 22 sino al fondo *si scambino fra loro* le lettere H, K.

La figura 149 (tav. XXXVII) dev' essere modificata in guisa che LM passi per U ed LN passi per V.

Alexander Ziwet

ELEMENTI

DI

CALCOLO GRAFICO,

DEL PROF.

LUIGI CREMONA

Direttore della R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Roma,

AD USO

DEGLI ISTITUTI TECNICI

del Regno d'Italia.

FIGURE

TORINO

STAMPERIA REALE DI G. B. PARAVIA E C.

1874.

Fig. 1.a
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13

Fig. 14
A
B
C
D
E
+1
Fig. 15
A
B
C
D
E
+1
-1
0
0
+1
Fig. 17
-1
+1
Fig. 16
+1
-1
+1
-1
+1
+2
+2
+1
+3
+1
-1
+2
+2
+1
Fig. 18
+2
+1
+3
-1
Fig. 19
AB
AB'
+1
0
C'
C
Fig. 20
AB
AB'
+1
+2
C'
C
Fig. 21
A
+1
A'
0
B
-1
C'
C
B'
Fig 22
A
+1
B'
+2
B
+1
C'
C
A'
5
Fig. 23
6
1
2
4
3
1
2
3
4
5
6

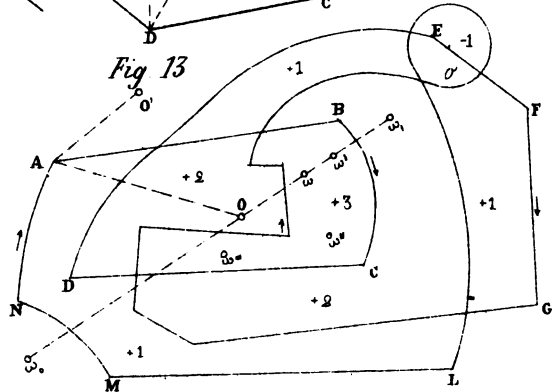
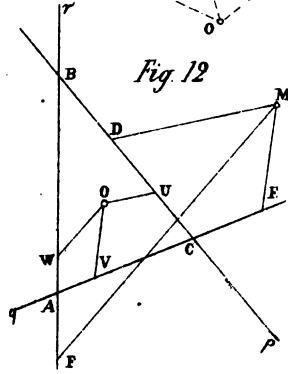
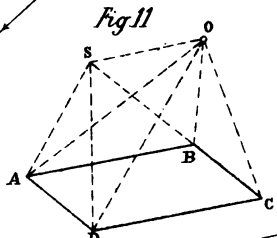
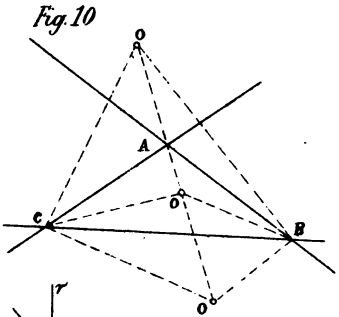
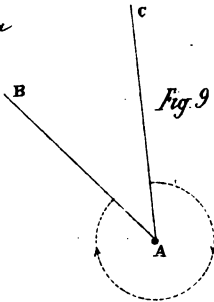
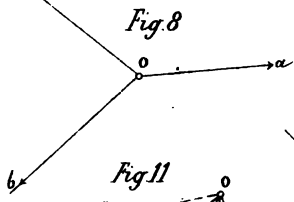
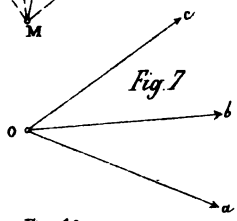
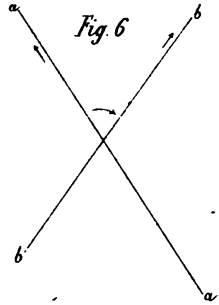
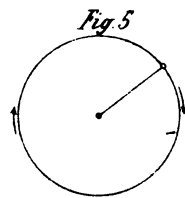
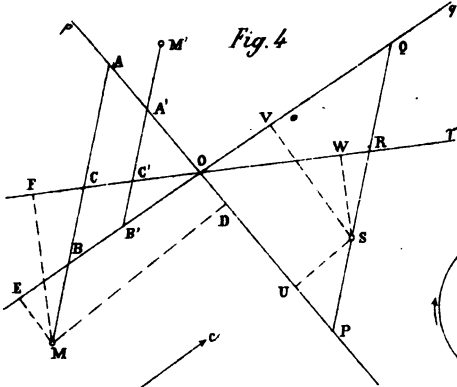
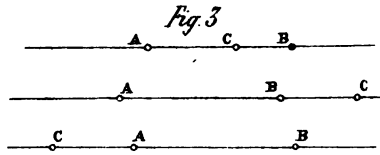
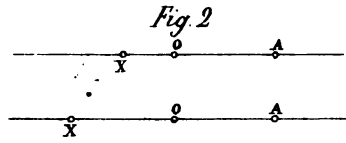
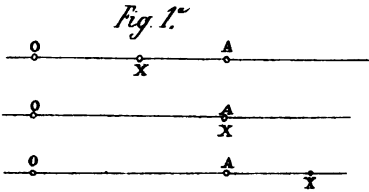
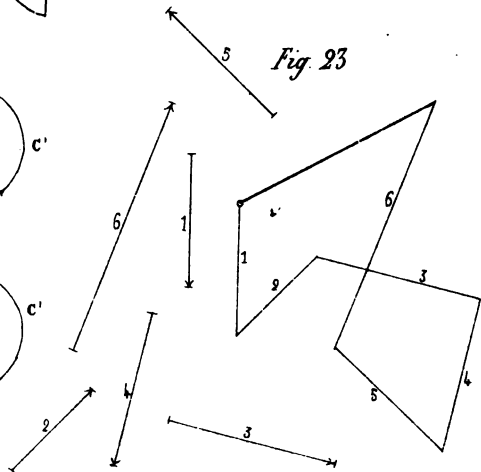
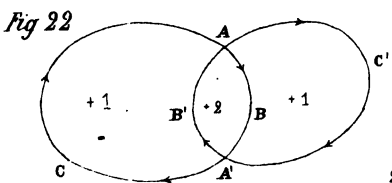
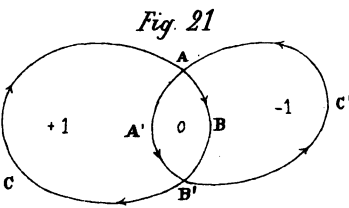
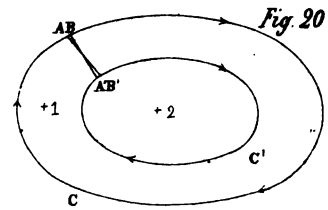
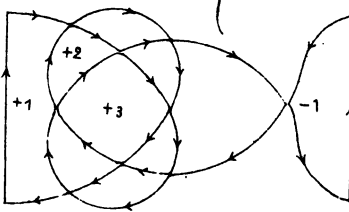
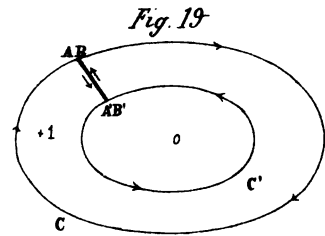
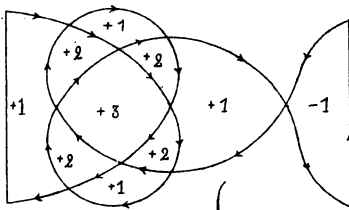
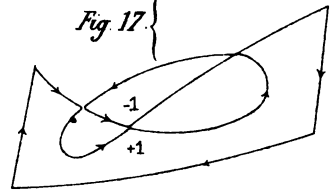
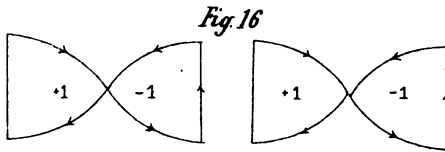
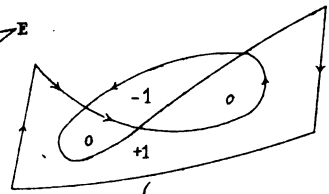
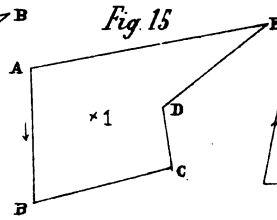
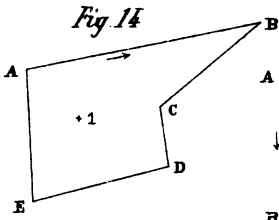



Fig 24 *Fig 25* *Fig 26*

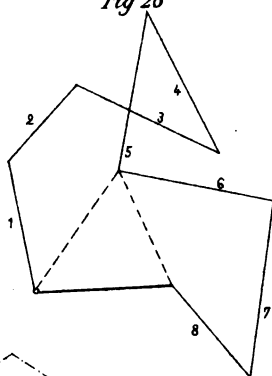



Fig. 27.

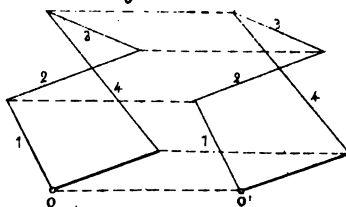



Fig 29

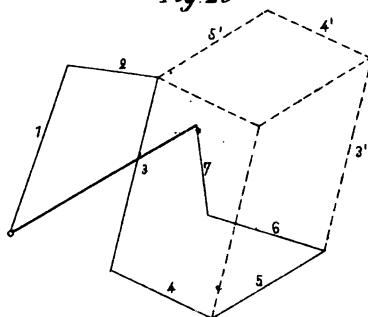



Fig. 28

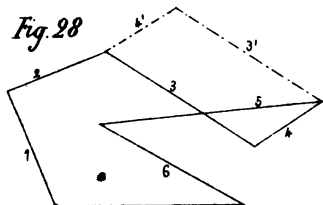



Fig. 30

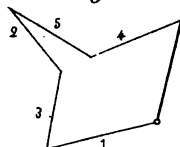



Fig 31

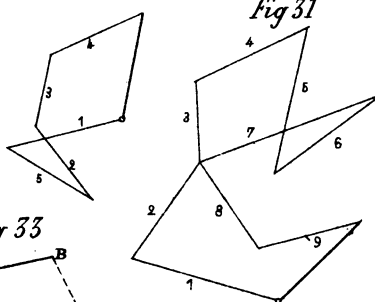



Fig 32 *Fig 33*

Fig 35

Fig 34

Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41
Fig. 42
Fig. 43
Fig. 44
Fig. 45
Fig. 46

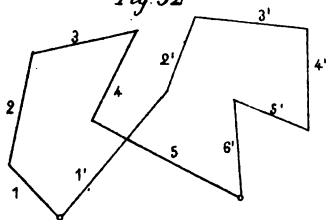
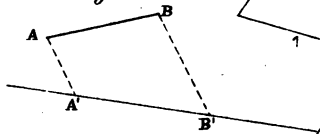
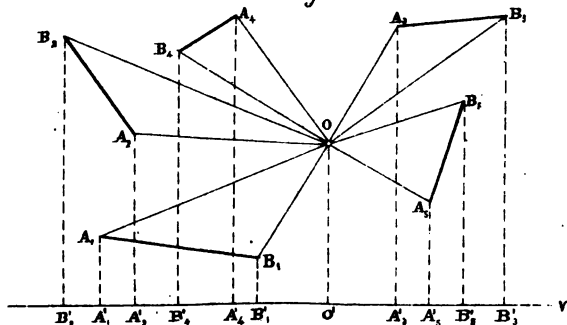
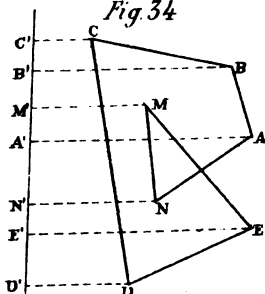
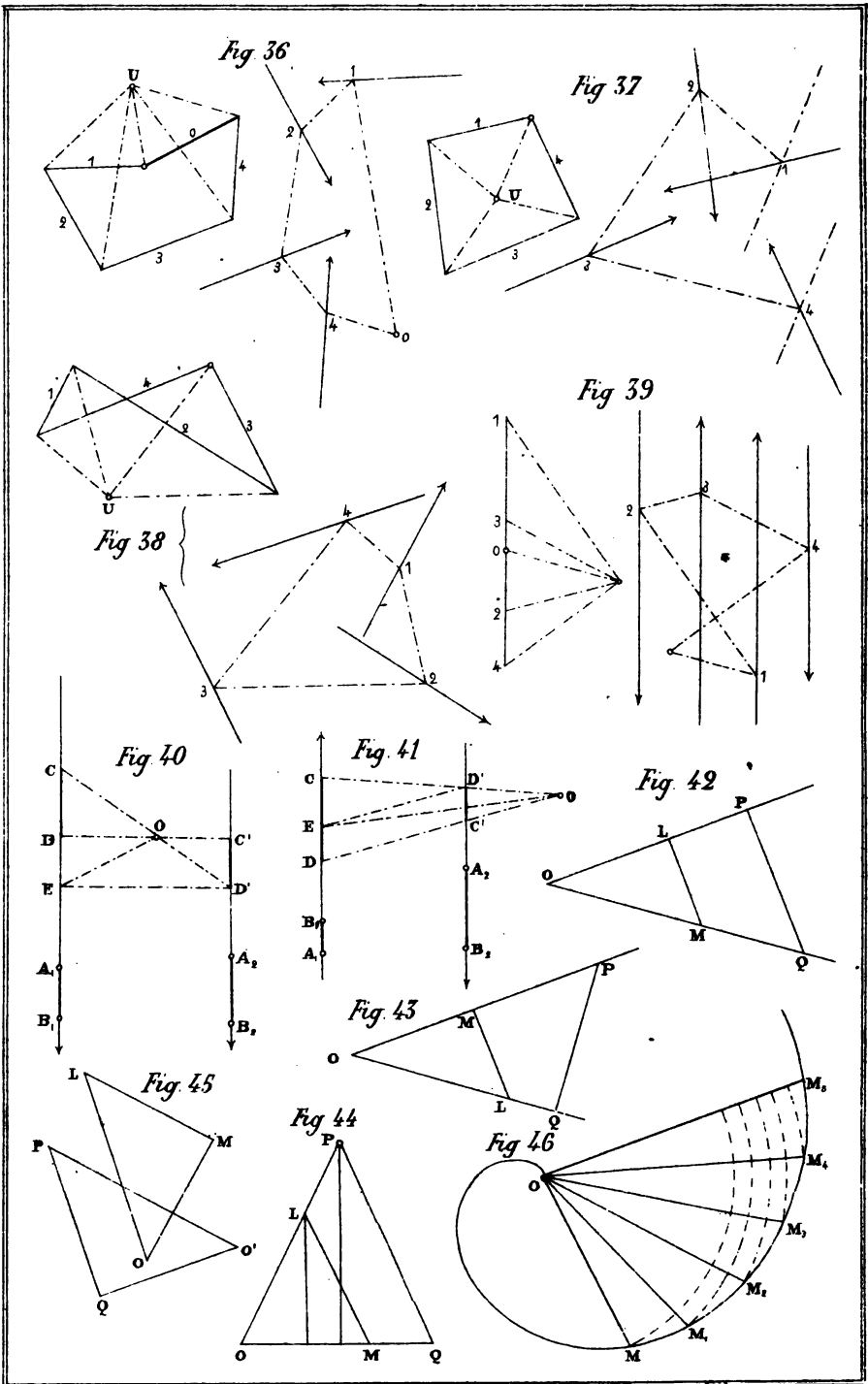
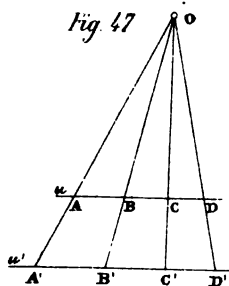
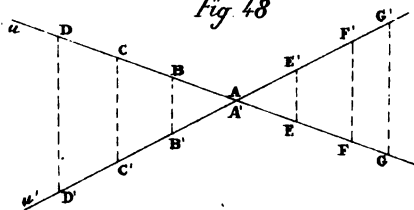
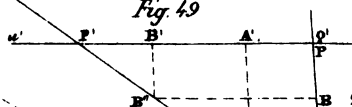



Fig. 47
Fig. 48
Fig. 49
Fig. 50
Fig. 51
Fig. 52
Fig. 53

Fig. 54
Fig. 55.
Fig. 56
Fig. 57
Fig. 58
Fig. 59
Fig. 60
Fig. 61

Fig. 62.
b
c
b
c
O
a_1
a_2
a_3
a
a_4
Fig. 63
b
c
a_1
a_2
a
O
a_3
a_4
Fig. 64
Fig. 65
C
B
D
A
O
E
F
G
Fig. 66
T
B
C
O
N
D
P

Fig. 67
A
S
B
M
N
P
C
D
Fig. 68
F
E
D
C
B
A
G
H
O
K
L
J
Fig. 70
X
A
O
B
Fig. 69
Fig. 70 bis
X
O
B
A
Fig. 71
X
B
O
A
Fig. 74
Q
R
N
P
M
T
O
Fig. 73
Fig. 72

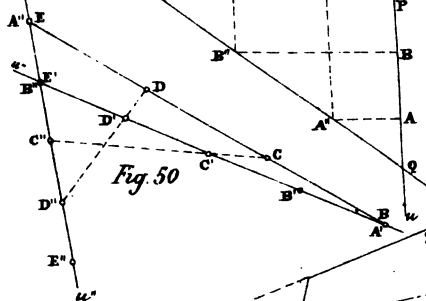
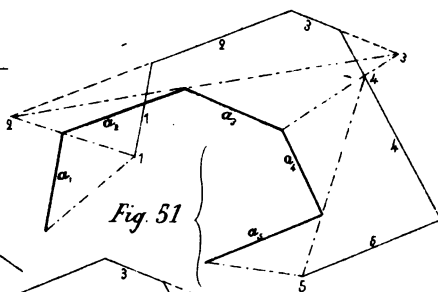
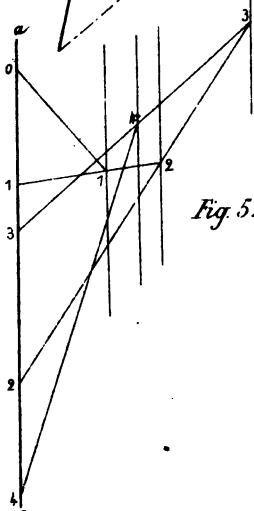
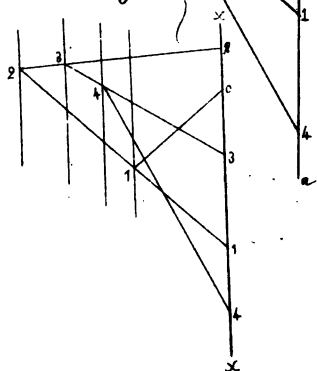
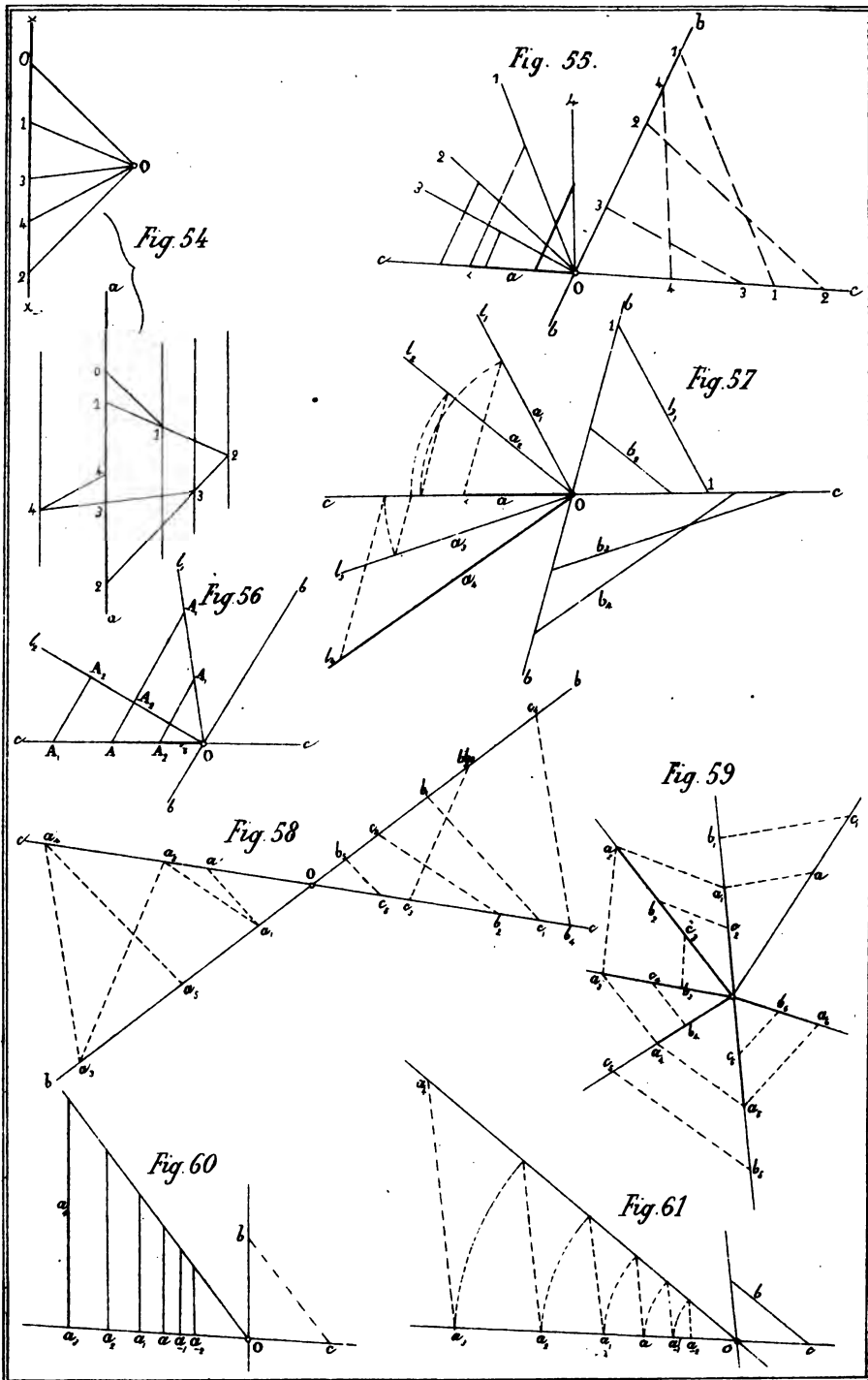
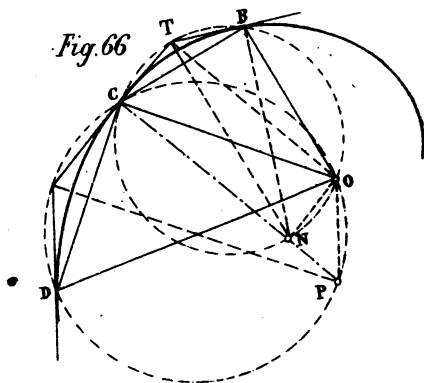
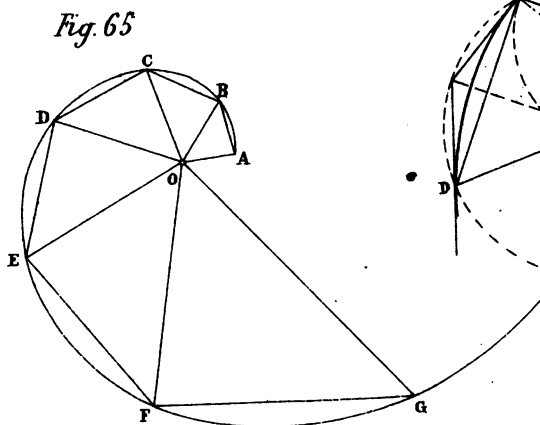
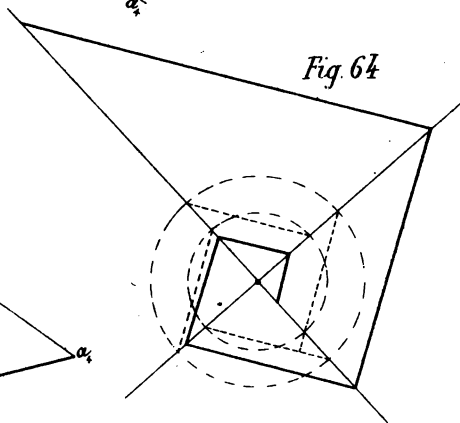
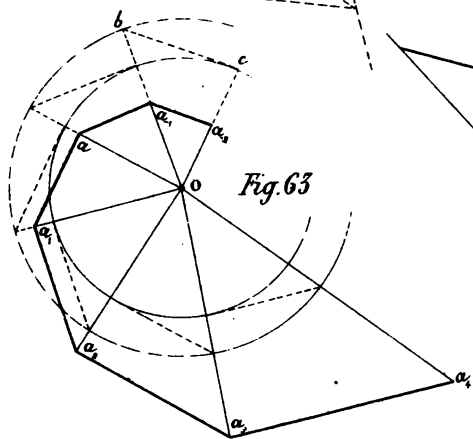
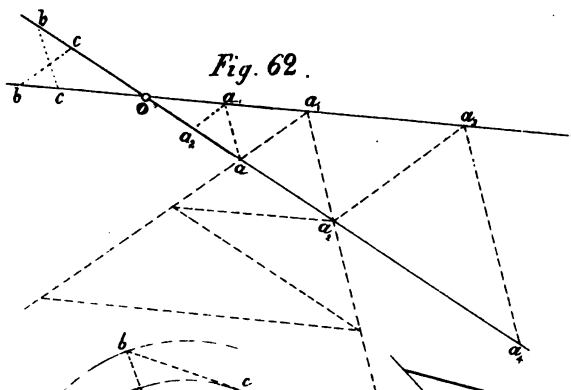
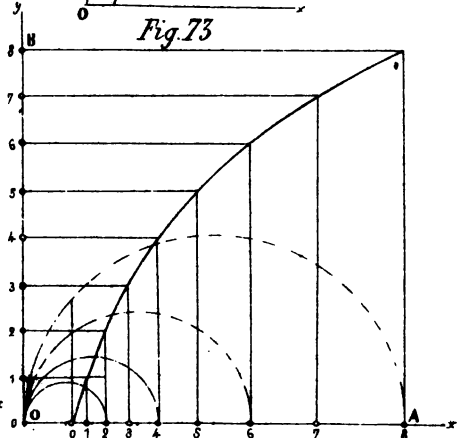
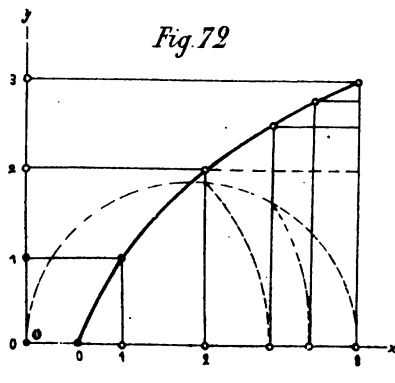
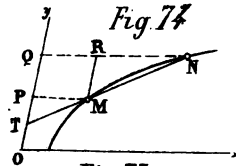
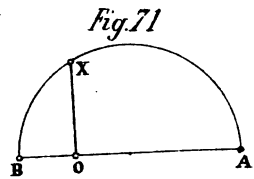
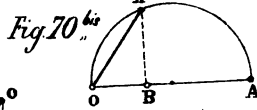
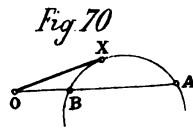
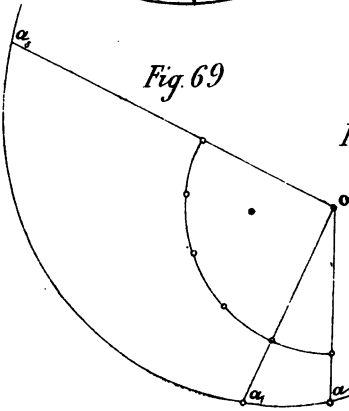
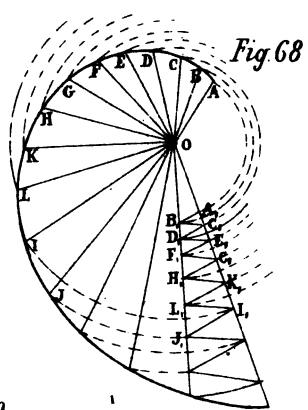
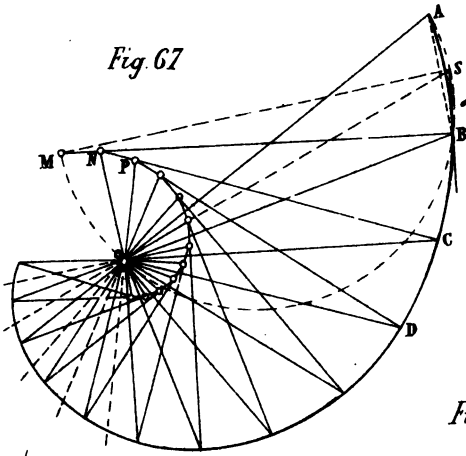
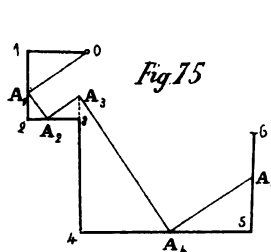
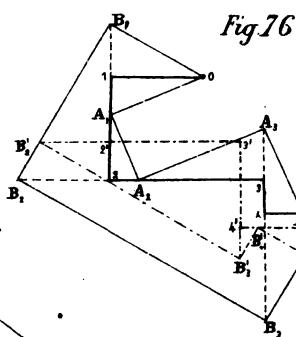
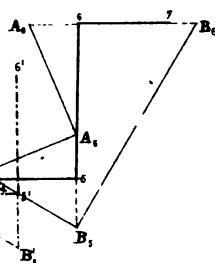
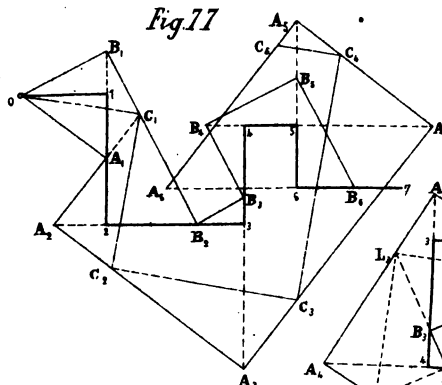
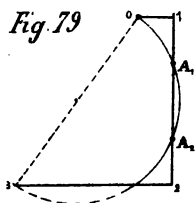



Fig. 75
Fig. 76
Fig. 77
Fig. 78
Fig. 79
Fig. 80
Fig. 81
Fig. 82
Fig. 83
Fig. 84

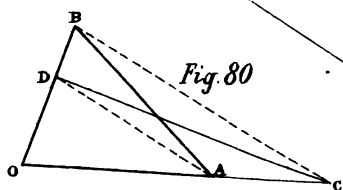
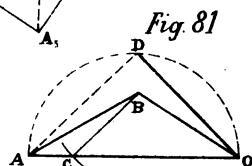
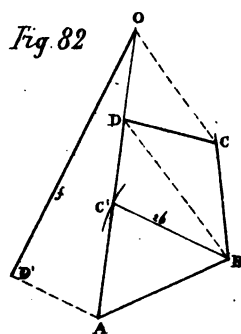
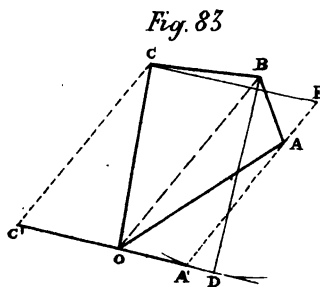
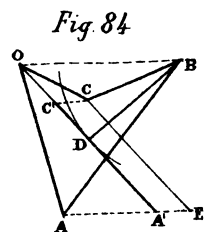
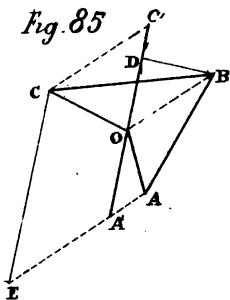
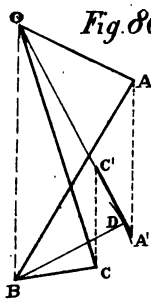
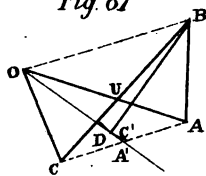



Fig. 85
Fig. 86
Fig. 87
Fig. 88
Fig. 89
Fig. 90
Fig. 91
Fig. 92
Fig. 93
Fig. 94
Fig. 95
Fig. 96

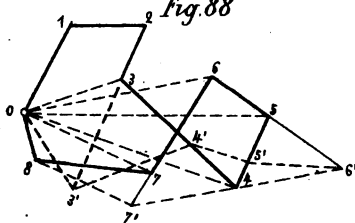
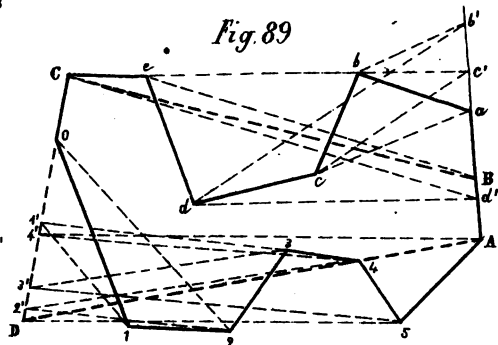
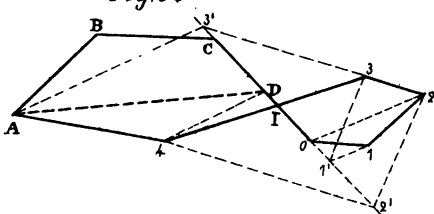
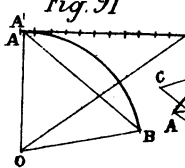
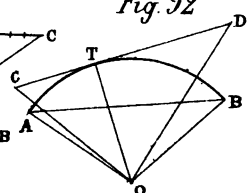



Fig. 95 bis

Fig. 97

Fig. 98

Fig. 99

Fig. 100

Fig. 101

Fig. 102

Fig. 103

Fig. 104

Fig. 105

Fig. 106

Fig. 107

Fig. 108

Fig. 109

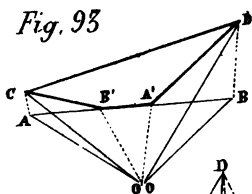
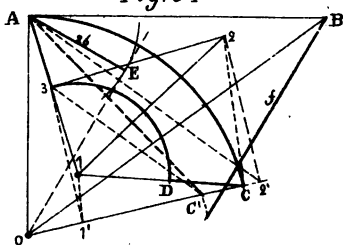
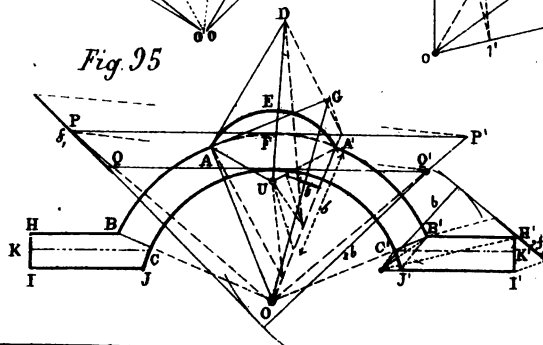
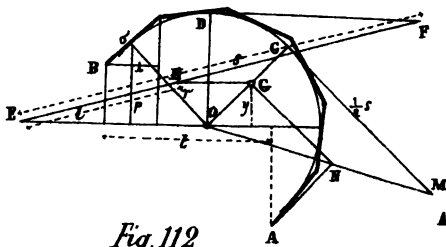
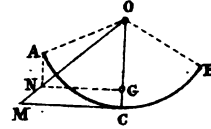
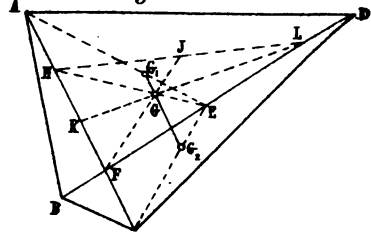
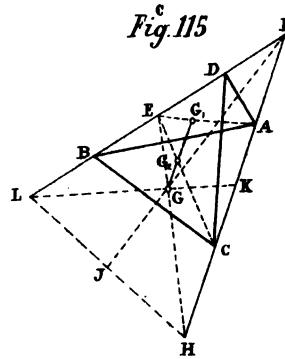
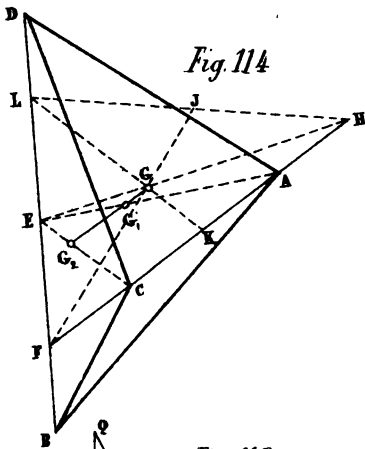
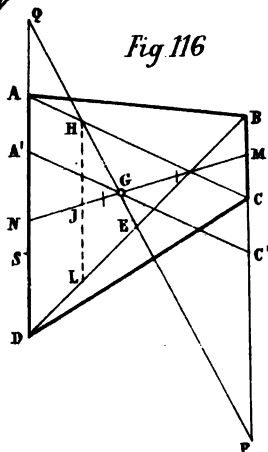
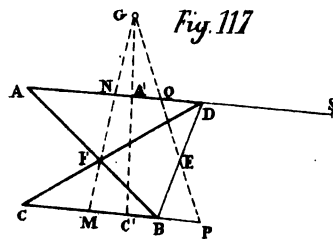



Fig. 110
Fig. 111
Fig. 112
Fig. 113
Fig. 114
Fig. 115
Fig. 116
Fig. 117
Fig. 118

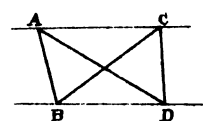
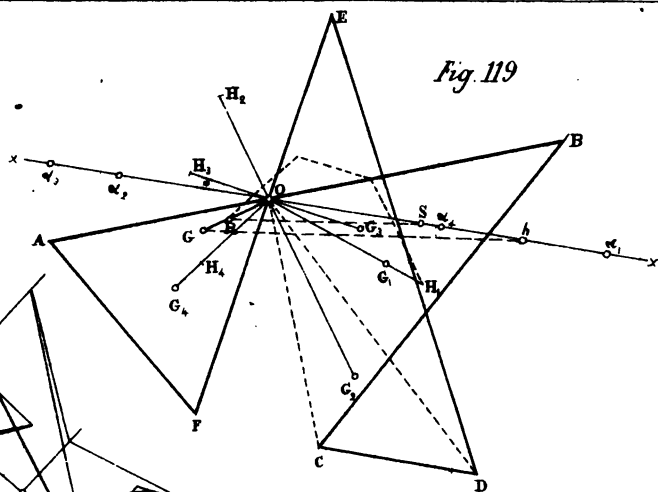



Fig. 119

Fig. 120

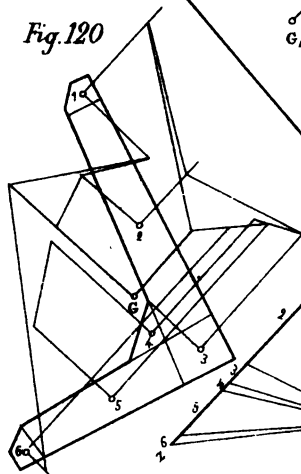



Fig. 121

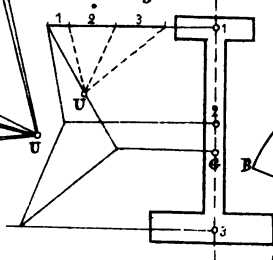



Fig. 122

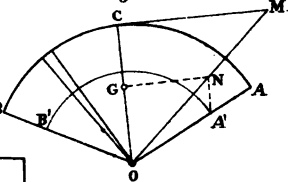



Fig. 123

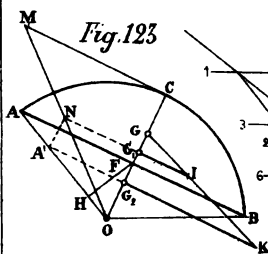



Fig. 124

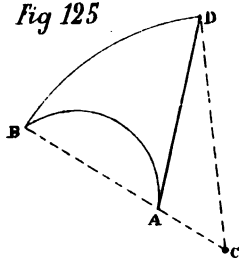
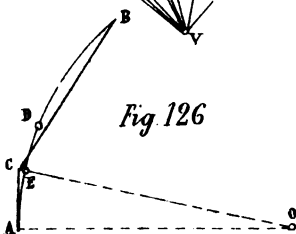



Fig 125

Fig. 126

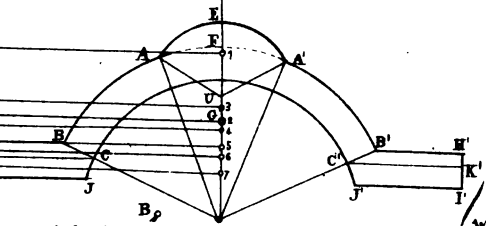
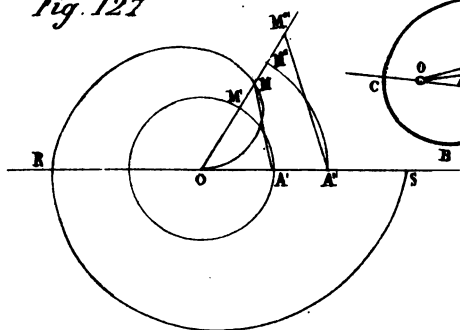
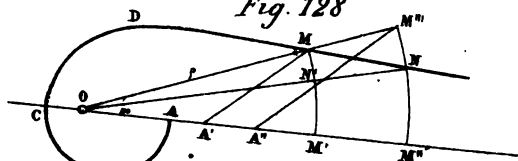
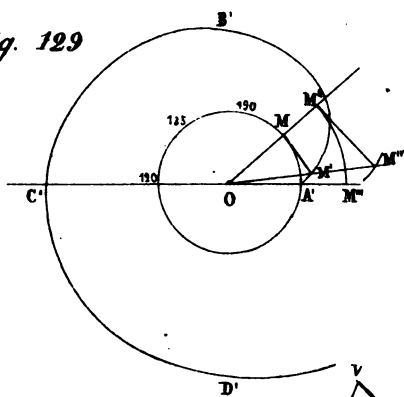
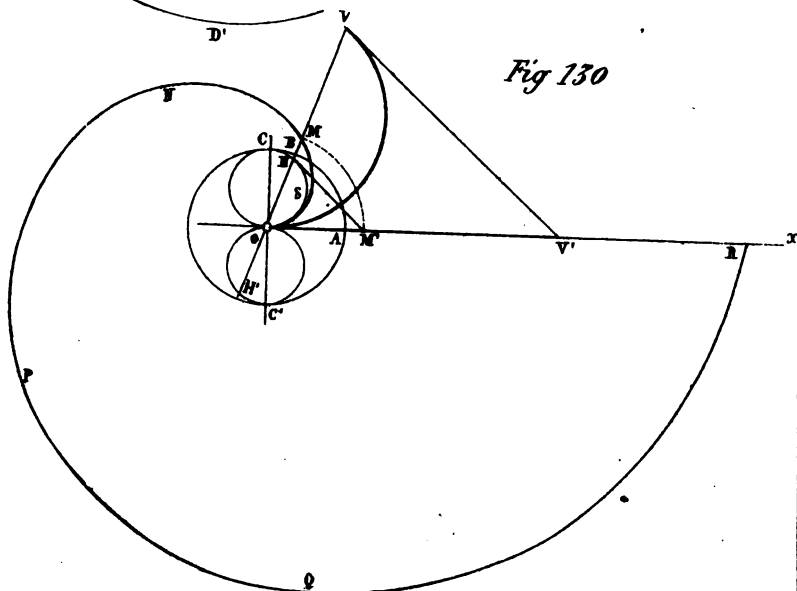
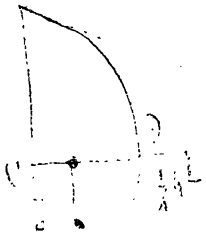



Fig. 127
Fig. 128
Fig. 129
Fig 130

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA PROJETTIVA

DEL PROFESSORE

LUIGI CREMONA

Direttore della R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Roma

AD USO

DEGLI ISTITUTI TECNICI DEL' REGNO D'ITALIA

VOLUME PRIMO
contenente la materia assegnata dal Programma dell'ottobre 1871
al 1° corso del 2° biennio.

Prezzo del Vol. I (Testo e Figure) L. 3, 50.

Di prossima pubblicazione il VOLUME II.